TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

AD. MEYER, OTTO GALLANDER,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

FEMTE ÅRGÅNGEN

1921—1922

STOCKHOLM
ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM
ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1922

Femte årgångens innehåll.

I. Uppsatser.

Sid.

BENEDICKS, CARL. Om innebörden av Le Chatelier-Brauns princip... 197
BOLINDER, G. Om fyrhörningar och deras inskrivbara bissektrisfyrhörningar II 1
ENSKOG, D. Om modern framställning av Ohms lag 172
ERIKSSON, AXEL. Undersökningar över värmegenomgången hos byggnadskonstruktioner 159
FRENDEL, A. Ett par skolförsök över diffusion..... 182
GALLANDER, OTTO. Om fysiska laborationer vid tekniska läroverket i Örebro 33
GRANQVIST GUSTAF. Om variationerna i de enligt Langleys metod beräknade solarkonstanterna 216
HOLMBERG, KNUT. Om reaktionerna vid elektroderna vid elektrolys 110
JOSEPHSON, OLOF. Några formelhärledningar i stereometrien 192
LING, CARL. En tvåfjädervåg för fjärde klassen 179
MEBIUS, C. A. Om ljusets relativa fortplantningshastighet 154
MEYER, AD. Derivatan av a^x och ${}^a\log x$ 140
—— Värmeteorins andra huvudsats 208
MOLIN, KURT. Experimentellt studium av begreppet fasdifferens på skolstadiet 71
NILSSON, HJ. Trianglar, där sidornas och ytans mätetal äro hela tal, och sidorna bilda en aritmetisk serie 23
ODENKRANTZ, ARVID. Nyare undersökningar om korta väglängder ... 96
STARCK, G. Några synpunkter på undervisningen i elektrokemi i skolan 39
—— En modifierad Victor Meyers apparat 52
—— Några beräkningar på grundval av Nernsts formel 236
—— Kemiska notiser III o. IV 105
X. Ett par uppgifter ur cirkelns geometri 65
—— Några satser i samband med Menalos' och Cevas transversalsatser 129
ÅNGSTRÖM, ANDERS. Är solens strålning variabel?..... 78
—— Solarkonstantens variationer 145

II. Meddelanden, recensioner, uppgifter m. m.

Meddelanden: Sid.

Experimentell demonstration av Joules lag (M. LEMOIN) 114

Bevisar avplattningen vid polerna att jorden varit flytande? (H. SVENONIUS) 186

En vansklig uppgift (KARL BLIX) 246

Bokanmälan:

»De tekniska vetenskaperna» (OTTO GALLANDER) 245

Polemik:

Ett påpekande beträffande en nyutkommen populärvetenskaplig skrift (Redaktionellt) 116

Angående en uppsats om Ohms lag (OTTO GALLANDER) 187

Bemötande av K. HOLMBERGS uppsats om reaktionerna vid elektrolys (OTTO GALLANDER) 112

Genmäle till lektor Gallander (K. HOLMBERG) 234

Prisuppgift 1921—22 64

Matematiska och fysikaliska uppgifter 58, 118, 187, 249

Lösningar 59, 119, 188, 249

Om fyrhörningar och deras inskrivbara bissektrisfyrhörningar.

Av G. BOLINDER.

II.

§ 4.

För att få lösningen av det i § 1 uppställda problemet så generell som möjligt har det varit nödvändigt att utom konvexa fyrhörningar även medtaga fyrhörningar, som ha ett inåtgående hörn eller två varandra skärande sidor. De fyrhörningar, som äro länkar i Stuckes kedja (§ 1), äro emellertid allesamman konvexa. Vi vilja därför i det följande endast sysselsätta oss med *konvexa fyrhörningar och deras konvexa, inskrivbara bissektrisfyrhörningar.* En konvex fyrhörning *ABCD*, som ej är omskrivbar, har alltid två konvexa, inskrivbara bissektrisfyrhörningar, nämligen $O_1'O_2'O_3'O_4'$ (fig. 8), som bildas av de inre, och $O_1''O_2''O_3''O_4''$, som bildas av de yttre bissektriserna till vinklarna. Är *ABCD* omskrivbar, finns det endast en sådan bissektrisfyrhörning, nämligen $O_1''O_2''O_3''O_4''$; $O_1'O_2'O_3'O_4'$ är då en punkt. Betrakta vi alltså *ABCD* som länk i Stuckes kedja, kan i förra fallet antingen $O_1'O_2'O_3'O_4'$ eller $O_1''O_2''O_3''O_4''$ vara kedjans nästa länk. I senare fallet är naturligtvis $O_1''O_2''O_3''O_4''$ den fyrhörning, som följer närmast efter *ABCD*.

De i fig. 8 införda beteckningarna på bissektrisfyrhörningarnas vinklar motsvara dem, som använts i fig. 2. Eftersom fyrhörningarna $AO_1'BO_1''$ och $CO_3'DO_3''$ äro inskrivbara, få vi genast följande likheter:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha''=\frac{A}{2}\ ,\quad \beta''=\frac{B}{2}\ ,\quad \gamma''=\frac{C}{2}\ ,\quad \delta''=\frac{D}{2} \\ \alpha'=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\ \beta'=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\ \gamma'=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2},\ \delta'=\frac{\pi}{2}-\frac{D}{2} \end{array}\right\} \quad (4).$$

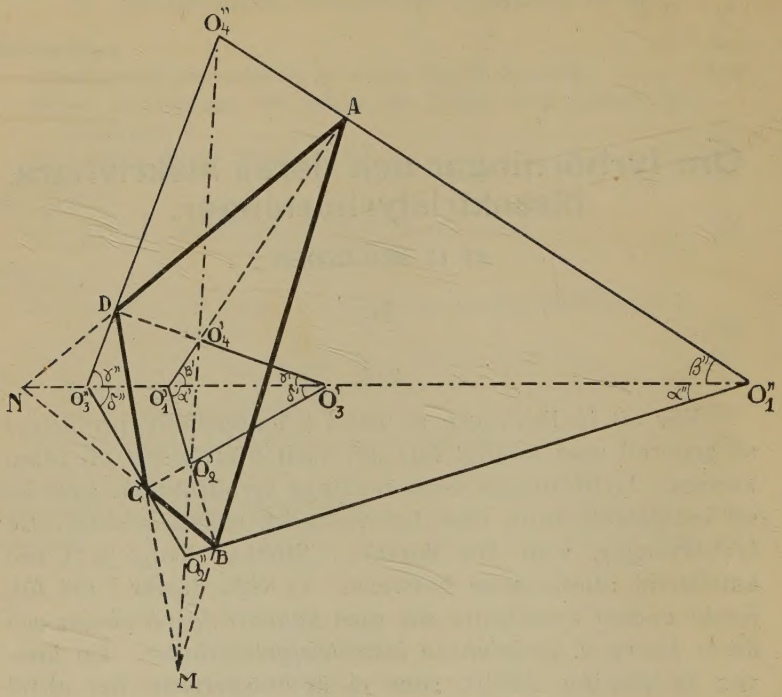


Fig. 8.

Av (4) följer, att var och en av vinklarna α'', β'', γ'' och δ'' (α', β', γ' och δ') är $< \pi/2$. Nu veta vi enligt §§ 2 och 3, att en konvex, inskrivbar fyrhörning $O_1O_2O_3O_4$, som har α, β, γ och δ mindre än $\pi/2$, är bissektrisfyrhörning till oändligt många konvexa fyrhörningar. Det finns nämligen dels fyrhörningar $A_1B_1C_1D_1$, i vilka de inre bissektriserna till vinklarna bilda $O_1O_2O_3O_4$, och dels fyrhörningar $A_3B_3C_3D_3$, i vilka de yttre bissektriserna till vinklarna bilda $O_1O_2O_3O_4$. *Den inskrivbara fyrhörningen $O_1O_2O_3O_4$ ingår alltså som länk i oändligt många kedjor.*

Vid den följande undersökningen av fyrhörningarnas egenskaper blir det alltid fråga om två sammanhängande länkar i Stuckes kedja. Vi beteckna dem med *ABCD* och $O_1O_2O_3O_4$. Betrakta vi $O_1O_2O_3O_4$ såsom given, kan *ABCD*

vara vilken som helst av de oändligt många fyrhörningarna $A_1B_1C_1D_1$ och $A_3B_3C_3D_3$, till vilka $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning. Är däremot $ABCD$ given, betecknar $O_1O_2O_3O_4$ den ena av bissektrisfyrhörningarna $O_1'O_2'O_3'O_4'$ och $O_1''O_2''O_3''O_4''$ till $ABCD$.

Såsom vi framhöllo i § 1, är det av intresse att få reda på sambandet mellan de båda länkarnas egenskaper. Vi vilja fördenskull tilldela den ena fyrhörningen en viss egenskap och se efter vilken egenskap, den andra fyrhörningen då erhåller. Det finns ett stort antal egenskaper, som härvid kunna komma i fråga. Sedan gammalt behandlas i de elementära läroböckerna vissa speciella fyrhörningar, vi tänka närmast på de omskrivbara och de inskrivbara fyrhörningarna, parallelltrapetsen och parallellogrammerna. Pugehl (§ 1) har visat, att egenskaperna hos dessa speciella fyrhörningar kunna sammansättas av fyra huvudegenskaper, och som sådana väljer han

egenskapen [A]: De fyra sidorna tangera en cirkel,
» [B]: *Ett* par motstående vinklar äro lika,
» [C]: *Ett* par motstående sidor äro parallella,
» [D]: De fyra hörnpunkterna ligga på en cirkel.

Följande kombinationer äro möjliga: [AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD], [ABC], [ACD], [BCD] och [$ABCD$]. Bland motsvarande fyrhörningar finna vi exempelvis parallellogrammen [BC], rektangeln [BCD], romben [ABC] och kvadraten [$ABCD$]. En fyrhörning [AB], som är omskrivbar och har ett par motstående vinklar lika, kallas drake. De inre bissektriserna till de andra vinklarna ligga i rät linje, drakens symmetrilinje. En fyrhörning [AD], som är både om- och inskrivbar, säges vara bicentrisk. Utom de fyra nämnda egenskaperna finns det en, som för oss är av intresse, och för vilken vi därför införa särskild beteckning, nämligen egenskapen [E]: De båda diagonalerna äro vinkelräta mot varandra; en drake (spec. en romb och en kvadrat) har alltid egenskapen [E].

Av de båda länkarna $ABCD$ och $O_1O_2O_3O_4$ har $O_1O_2O_3O$

alltid egenskapen [*D*]. I § 3 ha vi redan behandlat de fall, då $O_1O_2O_3O_4$ har egenskaperna [*CD*], [*BD*] och [*BCD*]. Resultaten sammanfatta vi i satsen:

Egenskaperna [*CD*], [*BD*] *och* [*BCD*] *hos* $O_1O_2O_3O_4$ *ge åt ABCD egenskaperna* [*B*], [*C*] *och* [*BC*] *respektive.*

Denna sats kan omvändas, d. v. s. *egenskaperna* [*B*], [*C*] *och* [*BC*] *hos ABCD ge åt* $O_1O_2O_3O_4$ *egenskaperna* [*CD*], [*BD*] *och* [*BCD*] *respektive.* Beviset fås lätt medelst formlerna (4). Har nämligen *ABCD* egenskapen [*B*], äro två motstående vinklar t. ex. *B* och *D* lika. Enligt (4) är då $\beta''=\delta''$ ($\beta'=\delta'$). Härav följer, att $O_1''O_4'' \parallel O_2''O_3''$ ($O_1'O_4' \parallel O_2'O_3'$), och $O_1O_2O_3O_4$ har egenskaperna [*CD*]. Den återstående delen av satsen bevisas på liknande sätt.

§ 5.

I denna paragraf vilja vi sysselsätta oss med egenskapen [*A*]. Vi förutsätta alltså, att en av länkarna *ABCD* och $O_1O_2O_3O_4$ har denna egenskap d. v. s. är *omskrivbar.* I allmänhet anser man en fyrhörning vara omskrivbar även i det fall, att alla sidornas förlängningar tangera en och samma cirkel. Vi vilja emellertid om en sådan fyrhörning säga, att den är *vidskrivbar.*

1. *Fyrhörningen* $O_1O_2O_3O_4$ *är omskrivbar* (*vidskrivbar*). Den är då bicentrisk. I en omskrivbar fyrhörning är som bekant summan av två motstående sidor lika med summan av de övriga; i en vidskrivbar fyrhörning är skillnaden mellan två motstående sidor lika med skillnaden mellan de övriga. Betecknas den omskrivna cirkelns diameter med *d*, fås alltså enligt sinusteoremet

$$d\sin\gamma \pm d\sin\alpha = d\sin\delta \pm d\sin\beta^1$$

eller
$$\sin\gamma \pm \sin\alpha = \sin\delta \pm \sin\beta \quad (\gamma > \alpha,\ \delta > \beta) \qquad (5).$$

De undre tecknen tagas, om $O_1O_2O_3O_4$ är vidskrivbar. Enligt (4) kunna vinklarna α, β, γ och δ uttryckas i *A*, *B*, *C* och *D*. Insättas dessa värden på α, β, γ och δ i (5),

[1] Angående bokstävernas betydelse se fig. 8.

erhållas de villkor, *ABCD*:s vinklar måste uppfylla, för att bissektrisfyrhörningen $O_1O_2O_3O_4$ skall vara omskrivbar eller vidskrivbar. De sålunda erhållna egenskaperna hos *ABCD* äro emellertid ej av så stort intresse, att vi för dem införa särskilda beteckningar.

2. *Fyrhörningen ABCD är omskrivbar.* $O_1O_2O_3O_4$ betecknar då bissektrisfyrhörningen $O_1''O_2''O_3''O_4''$ till *ABCD* (§ 4). Vi påstå, att *egenskapen* [*A*] *hos ABCD ej ger någon ny egenskap åt* $O_1O_2O_3O_4$. Detta påstående är tydligen sant, om vi kunna visa, att det alltid finns åtminstone en lösning till följande problem:

En inskrivbar fyrhörning $O_1O_2O_3O_4$, *som har* α, β, γ *och* δ *mindre än* $\pi/2$, *är given. Att bland de fyrhörningar* $A_3B_3C_3D_3$, *till vilka* $O_1O_2O_3O_4$ *är bissektrisfyrhörning, finna en, som är omskrivbar.*

Eftersom O_1O_3:s riktningslinje är bissektris till vinkeln $A_3N_3B_3$, måste i en omskrivbar $A_3B_3C_3D_3$ den inskrivna cirkelns medelpunkt ligga på O_1O_3:s riktningslinje. Av liknande skäl måste medelpunkten även ligga på O_2O_4:s riktningslinje. I varje omskrivbar $A_3B_3C_3D_3$ måste alltså alla inre bissektriser till vinklarna gå genom O_1O_3:s och O_2O_4:s skärningspunkt Q

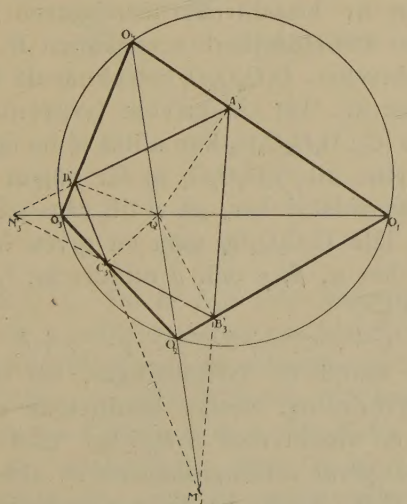


Fig. 9.

(fig. 9). Härav följer, att det endast kan tänkas en omskrivbar $A_3B_3C_3D_3$.

Vi draga från Q normalen QA_3' mot sidan O_1O_4 och upprita medelst metoden i § 2 den fyrhörning $A_3'B_3'C_3'D_3'$ (fig. 9), som har en hörnpunkt i A_3'. Då är $A_3'Q$ bissektris till vinkeln A_3'. Av de vanliga satserna om bissektriserna till en triangels vinklar, tillämpade på trianglarna $A_3'N_3'B_3'$, $B_3'M_3'C_3'$ och $C_3'N_3'D_3'$, följer, att $B_3'Q$, $C_3'Q$ och $D_3'Q$ äro bissektriser till vinklarna B_3', C_3' och D_3' resp., d. v. s. att $A_3'B_3'C_3'D_3'$ är omskrivbar. Eftersom α, β, γ och δ äro mindre än $\pi/2$, måste punkterna A_3', B_3', C_3' och D_3', som ju äro fotpunkter till normaler från Q mot $O_1O_2O_3O_4$:s sidor, ligga på dessa sidor. Den erhållna $A_3'B_3'C_3'D_3'$ är alltså en $A_3B_3C_3D_3$. Även för de i § 3 behandlade, speciella fyrhörningarna $O_1O_2O_3O_4$, ger denna metod omskrivbara $A_3'B_3'C_3'D_3'$. I § 3 *a*) erhålles en drake, i *b*) ett omskrivbart paralleltrapets och i *c*) en romb. *Det finns alltså alltid en och endast en omskrivbar fyrhörning* $A_3B_3C_3D_3$, *till vilken den givna* $O_1O_2O_3O_4$ *är bissektrisfyrhörning.* Egenskapen [*A*] hos *ABCD* ger således ingen ny egenskap åt $O_1O_2O_3O_4$.

3. *Fyrhörningen ABCD är vidskrivbar.* $O_1O_2O_3O_4$ betecknar då en av bissektrisfyrhörningarna $O_1'O_2'O_3'O_4'$ och $O_1''O_2''O_3''O_4''$. Har *ABCD* därjämte egenskapen [*B*], är den, såsom lätt inses, omskrivbar. $O_1O_2O_3O_4$ betecknar då $O_1''O_2''O_3''O_4''$ och har egenskapen [*C*]. En vidskrivbar fyrhörning kan aldrig ha egenskapen [*C*]; $O_1O_2O_3O_4$ kan alltså ej ha egenskapen [*B*].

För att visa att $O_1O_2O_3O_4$ ej får någon ny egenskap, då *ABCD* göres vidskrivbar, gå vi till väga på liknande sätt som i 2. Vi låta $O_1O_2O_3O_4$ vara en given inskrivbar fyrhörning, som har α, β, γ och δ mindre än $\pi/2$, och vilkens vinklar äro olika,

$$\alpha+\beta<\alpha+\delta<\beta+\gamma<\gamma+\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Vi påstå, att bland de fyrhörningar, till vilka $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning, finnas åtminstone en vidskrivbar $A_1B_1C_1D_1$ och en vidskrivbar $A_3B_3C_3D_3$. Lätt inses, att den cirkel, som tangerar förlängningarna av sidorna i en vidskrivbar $A_1B_1C_1D_1$, måste ha sin medelpunkt i O_1O_4:s och

O_2O_3:s skärningspunkt S, och att den cirkel, som tangerar förlängningarna av sidorna i en vidskrivbar $A_3B_3C_3D_3$, måste ha sin medelpunkt i O_1O_2:s och O_4O_3:s skärningspunkt R. Det kan alltså endast tänkas en vidskrivbar fyrhörning i vardera gruppen.

Vi draga normalen SN_1' mot O_1O_3:s riktningslinje och upprita medelst metoden i § 2 den mot N_1' svarande fyr-

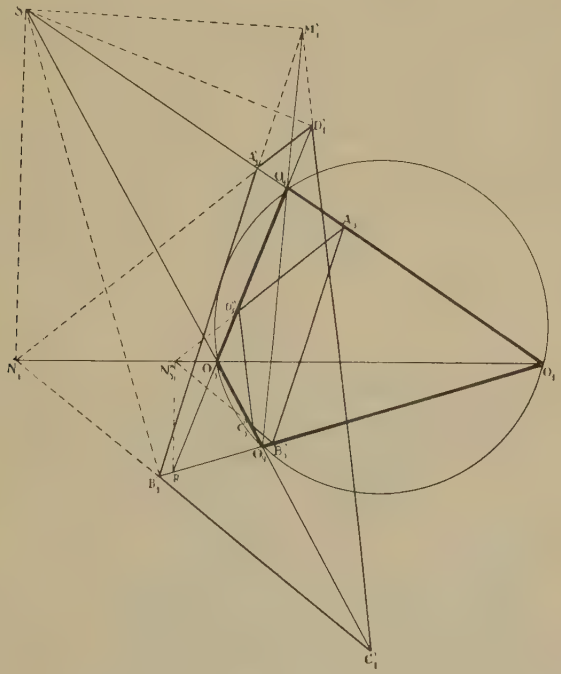


Fig. 10.

hörningen $A_1'B_1'C_1'D_1'$. Då är $N_1'S$ yttre bissektris till vinkeln $C_1'N_1'D_1'$. Av de vanliga satserna om bissektriserna till en triangels vinklar, tillämpade på trianglarna $C_1'D_1'N_1'$, $D_1'M_1'A_1'$ och $M_1'B_1'C_1'$, följer, att $D_1'S$, $M_1'S$ och $B_1'S$ äro yttre bissektriser till vinklarna $C_1'D_1'N_1'$, $D_1'M_1'A_1'$ och $M_1'B_1'C_1'$ resp., d. v. s. att $A_1'B_1'C_1'D_1'$ är vidskrivbar. Enl. (2) är $\sphericalangle O_1O_4O_3 < \pi/2$, och därför måste D_1', som ju är fotpunkt till normalen

från S mot O_3O_4:s riktningslinje, ligga på förlängningen av O_3O_4. Av samma orsak ligger B_1' på förlängningen av O_1O_2. Den erhållna $A_1'B_1'C_1'D_1'$ är alltså en $A_1B_1C_1D_1$. Med tillhjälp av punkten R få vi på liknande sätt en vidskrivbar $A_3''B_3''C_3''D_3''$ (fig. 10), som lätt bevisas vara en $A_3B_3C_3D_3$. *Det finns alltså alltid en vidskrivbar fyrhörning* $A_1B_1C_1D_1$ *och en vidskrivbar fyrhörning* $A_3B_3C_3D_3$, *till vilken den givna* $O_1O_2O_3O_4$ *är bissektrisfyrhörning.*

Äro två närliggande vinklar, $O_2O_1O_4$ och $O_1O_4O_3$, lika, d. v. s. har $O_1O_2O_3O_4$ egenskapen [C] finns det endast en vidskrivbar fyrhörning $ABCD$, nämligen $A_3''B_3''C_3''D_3''$ (punkten S ligger på oändligt avstånd). Eftersom R, C_3'', Q och A_3'' då ligga i rät linje, sammanfaller $A_3''B_3''C_3''D_3''$ med den i 2 erhållna omskrivbara $A_3'B_3'C_3'D_3'$. Såsom redan påpekats, sid. 6, kan $O_1O_2O_3O_4$ ej ha egenskapen [B]. Härmed ha vi alltså bevisat, att $O_1O_2O_3O_4$ *ej får någon ny egenskap, då* $ABCD$ *är vidskrivbar.*

§ 6.

Vi övergå nu till egenskapen [E] och vilja först ge denna egenskap åt $O_1O_2O_3O_4$, d. v. s. vi förutsätta, att diagonalerna O_1O_3 och O_2O_4 äro vinkelräta mot varandra. Då är

$$\alpha+\gamma=\pi/2,\ \beta+\delta=\pi/2 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (6).$$

Av (6) följer, att

$$\wedge A_1+\wedge C_1=(\pi-2\alpha)+(\pi-2\gamma)=2\gamma+2\alpha=\wedge C_3+\wedge A_3=\pi.$$

Egenskaperna [DE] *hos* $O_1O_2O_3O_4$ *ge egenskapen* [D] *åt* $ABCD$. Enligt teoremet i § 1 kan denna sats omvändas d. v. s. *egenskapen* [D] *hos* $ABCD$ *ger egenskaperna* [DE] *åt* $O_1O_2O_3O_4$. Beviset fås lättast medelst formlerna (4). Vidare är

$$\wedge A_1=\wedge C_3,\ \wedge B_1=\wedge D_3,\ \wedge C_1=\wedge A_3,\ \wedge D_1=\wedge B_3.$$

Alla fyrhörningar $A_1B_1C_1D_1$ *och* $A_3B_3C_3D_3$, *till vilka* $O_1O_2O_3O_4$ *är bissektrisfyrhörning, äro alltså likvinkliga.*

Bland fyrhörningarna $ABCD$ finnes alltid en, $A_3'B_3'C_3'D_3'$ (§ 5), som är omskrivbar. Den uppritas lättast genom att från diagonalernas skärningspunkt Q draga normaler mot

$O_1O_2O_3O_4$:s sidor och sammanbinda fotpunkterna. $A_3'B_3'C_3'D_3'$ *är en bicentrisk fyrhörning.* Härmed ha vi alltså erhållit en enkel metod att med tillhjälp av en inskrivbar fyrhörning $O_1O_2O_3O_4$, vilkens diagonaler äro vinkelräta mot varandra, upprita en bicentrisk fyrhörning. Vi påpeka i detta sammanhang en annan, lika enkel metod, vid vilken man också utgår från en inskrivbar fyrhörning med egenskapen [*E*]. Enligt (6) är[1]

$$\wedge N_{12}O_4O_3 = \wedge O_4O_3O_1 - \wedge O_3N_{12}O_4 = \gamma - (\pi/2 - \alpha - \beta) = \\ = \beta = \wedge O_4O_1O_3.$$

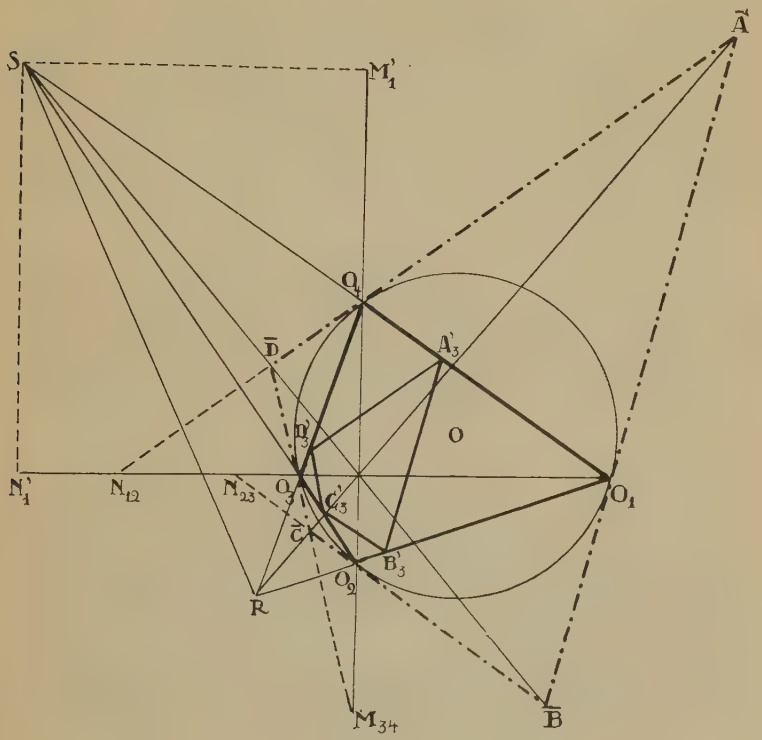


Fig. 11.

[1] N_{12}, N_{23}, M_{34} och M_{45} äro beteckningar på samma punkter som i fig. 3.

$N_{12}O_4$ har alltså samma riktning som den i punkten O_4 till cirkeln O dragna tangenten. Liknande resultat erhållas för linjerna $N_{23}O_2$, $M_{34}O_3$, $M_{45}O_1$ och tangenterna i punkterna O_2, O_3, O_1 respektive. Den av tangenterna bildade fyrhörningen $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ (fig. 11) har följaktligen sina sidor parallella med motsvarande sidor i $ABCD$. $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ är alltså en bicentrisk fyrhörning. Dess hörnpunkter ligga som bekant på RQ:s och SQ:s riktningslinjer. *Man får en bicentrisk fyrhörning, om man i punkterna O_1, O_2, O_3 och O_4 drager tangenter till cirkeln O.*

För de i § 3 behandlade, speciella fyrhörningarna få vi satserna: *Egenskaperna* $[CDE]$, $[BDE]$ *och* $[BCDE]$ *hos* $O_1O_2O_3O_4$ *ge åt* $ABCD$ *egenskaperna* $[BD]$, $[CD]$ *och* $[BCD]$ *resp. och tvärt om.* En fyrhörning med egenskaperna $[BE]$ är, såsom lätt inses, en drake. En sådan karaktäriseras av egenskaperna $[AB]$ enligt § 4. Vi kunna därför i ovanstående satser ersätta egenskaperna $[BDE]$ och $[BCDE]$ med $[ABD]$ och $[ABCD]$ resp. $O_1O_2O_3O_4$ är i förra fallet en inskrivbar drake, i senare fallet en kvadrat. Särskilt framhålla vi, att en inskrivbar fyrhörning $ABCD$, vars $O_1O_2O_3O_4$ är omskrivbar, har egenskaperna $[CD]$. $ABCD$ är således ett likbent paralleltrapets. Beviset för denna sats gavs först av Stengel (§ 1), som därvid utgick från formlerna (5).

§ 7.

Det återstår nu att tilldela länken $ABCD$ egenskapen $[E]$ och se efter vilken egenskap $O_1O_2O_3O_4$ då erhåller. $O_1O_2O_3O_4$ betecknar en av bissektrisfyrhörningarna $O_1'O_2'O_3'O_4'$ och $O_1''O_2''O_3''O_4''$. Har $ABCD$ utom egenskapen $[E]$ även egenskapen $[B]$, är den, såsom nyss påpekats, omskrivbar. $O_1O_2O_3O_4$ betecknar då $O_1''O_2''O_3''O_4''$ och har egenskapen $[C]$.

Eftersom diagonalerna AC och BD äro vinkelräta mot varandra, måste de vinklar (ANB och AMD i fig. 8), som bildas av $ABCD$:s motstående sidor, vara $< \pi/2$. Av satsen om vinkelsumman i en triangel följer då, att summan av

två närliggande vinklar, vilka som helst, i $ABCD$ är $> \pi/2$. Enligt (4) veta vi, att varje vinkel i $O_1''O_2''O_3''O_4''$ är aritmetiska mediet till två närliggande vinklar i $ABCD$ t. ex.

$$\wedge O_2''O_1''O_4'' = \alpha'' + \beta'' = \frac{A+B}{2}.$$

I $O_1''O_2''O_3''O_4''$ är alltså var och en av vinklarna $> \pi/4$. Detsamma gäller om vinklarna i $O_1'O_2'O_3'O_4'$; denna fyrhörning är nämligen enl. (4) likvinklig med $O_1''O_2''O_3''O_4''$. *Då ABCD har egenskapen* [E], *är var och en av vinklarna i* $O_1O_2O_3O_4$ *större än* $\pi/4$.

För att visa att $O_1O_2O_3O_4$ *ej får någon speciell egenskap, då ABCD tilldelas egenskapen* [E], gå vi till väga på samma sätt som i § 5, då det var fråga om egenskapen [A]. Vi låta $O_1O_2O_3O_4$ vara en given inskrivbar fyrhörning, som har α, β, γ och δ mindre än $\pi/2$. Om vinklarna i $O_1O_2O_3O_4$ antaga vi, att de äro olika, och att den minsta av dem är $> \pi/4$,

$$\pi/4 < \alpha+\beta < \alpha+\delta < \beta+\gamma < \gamma+\delta \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Vi påstå, att *bland de fyrhörningar, till vilka* $O_1O_2O_3O_4$ *är bissektrisfyrhörning, finnas två med egenskapen* [E]. *Den ena av dem är en* $A_1B_1C_1D_1$, *den andra en* $A_3B_3C_3D_3$.

Medelst metoden i § 2 upprita vi en fyrhörning $ABCD$, till vilken den givna $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning. I fig. 12 antages $ABCD$ vara en $A_3B_3C_3D_3$. Betraktad som bissektrisfyrhörning till $ABCD$ är $O_1O_2O_3O_4$ beteckning på $O_1''O_2''O_3''O_4''$. Vi upprita även $ABCD$:s bissektrisfyrhörning $O_1'O_2'O_3'O_4'$ (jfr fig. 8). Skärningspunkterna mellan $O'O_2'O_3'O_4'$:s motstående sidor beteckna vi med R' och S'. Tänka vi oss nu även andra fyrhörningar $A_3B_3C_3D_3$ uppritade jämte sina bissektrisfyrhörningar av typen $O_1'O_2'O_3'O_4'$, så är det lätt att inse, att alla dessa bissektrisfyrhörningar äro likställda med avseende på punkten Q. Deras motsvarande sidor äro nämligen parallella, eftersom de äro normaler till samma sida i $O_1O_2O_3O_4$. Vidare ligga motsvarande hörnpunkter alltid på samma stråle genom Q (§ 1).

För den omskrivbara $A_3'B_3'C_3'D_3'$ (§ 5) blir $O_1'O_2'O_3'O_4'$ en punkt, nämligen Q.

Tänka vi oss nu en $ABCD$ av typen $A_1B_1C_1D_1$ uppritad, så är $O_1O_2O_3O_4$, betraktad som bissektrisfyrhörning till $ABCD$, beteckning på $O_1'O_2'O_3'O_4'$. $ABCD$:s bissektrisfyrhörning $O_1''O_2''O_3''O_4''$ blir, såsom lätt inses, likställd med den i fig. 12 uppritade $O_1'O_2'O_3'O_4'$ med avseende på Q. Vi få alltså för var och en av fyrhörningarna $A_1B_1C_1D_1$ en bissektrisfyrhörning av typen $O_1''O_2''O_3''O_4''$, liksom vi nyss för

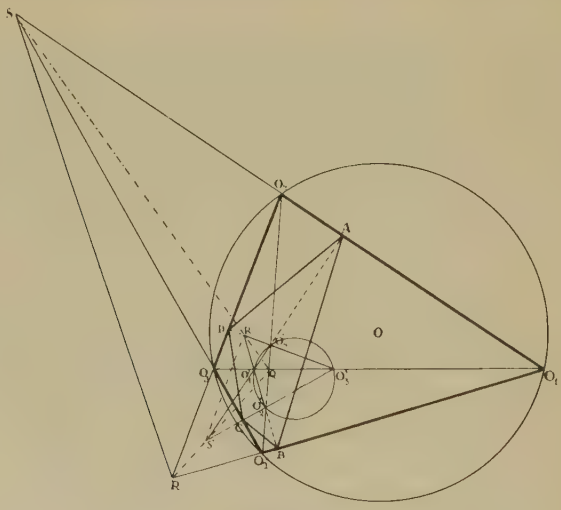


Fig. 12.

var och en av fyrhörningarna $A_3B_3C_3D_3$ fingo en bissektrisfyrhörning av typen $O_1'O_2'O_3'O_4'$. Samtliga bissektrisfyrhörningar äro likställda med avseende på Q. För oss är det av särskilt intresse att finna de strålar genom Q, på vilka punkterna R' och S' alltid ligga. Nu veta vi enligt § 5, att det bland fyrhörningarna $A_1B_1C_1D_1$ finnes en, som är vidskrivbar, nämligen $A_1'B_1'C_1'D_1'$. Välja vi denna som $ABCD$ i fig. 12, kommer, såsom av fig. 10 framgår, motsvarande R' att sammanfalla med S. Bland fyrhörningarna $A_3B_3C_3D_3$

finnes även en, som är vidskrivbar, nämligen $A_3''B_3''C_3''D_3''$ (§ 5). Välja vi denna som *ABCD*, kommer motsvarande S' att sammanfalla med R. Härav följer, att *punkten R' alltid ligger på SQ:s riktningslinje, och att S' alltid ligger på RQ:s riktningslinje.* Linjen $R'S'$ har enligt likställighetsläran alltid samma riktning, vilken *ABCD* vi än välja. Riktningen är för en given $O_1O_2O_3O_4$ fullt bestämd.

Vi ha alltså funnit, att varje fyrhörning *ABCD* motsvaras av en sträcka $R'S'$, vilkens ändpunkter ligga på de

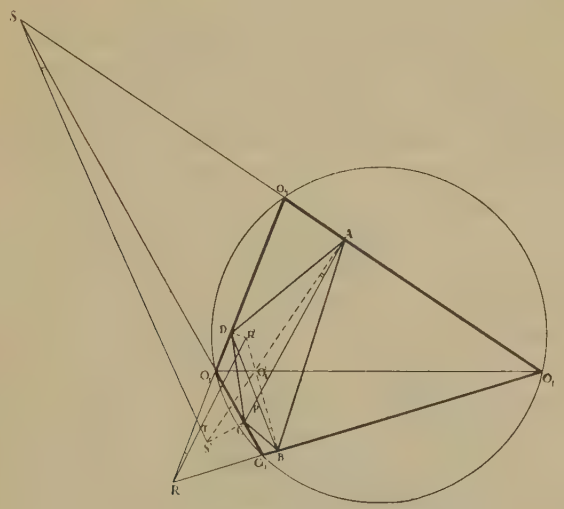


Fig. 13.

givna linjerna *SQ* och *RQ* eller på deras förlängningar. I fig. 13, som är densamma som fig. 12 (några linjer äro borttagna), äro diagonalerna *AC* och *BD* dragna. De skära varandra i *P*. Vidare äro linjerna RR' och SS' uppritade. Deras skärningspunkt är betecknad med *T*. Enligt satsen om yttervinkeln i en triangel är

$$\wedge BPC = \wedge DBR' + (\wedge S'O_1'B - \wedge S'AC)$$

och

$$\wedge RTS' = \wedge DRR' + (\wedge RO_3O_2 - \wedge S'SC).$$

Men $\wedge S'O_1'B = \wedge O_2O_1O_4 = \wedge RO_3O_2$,

$\wedge DBR' = \wedge DRR'$ (en cirkel kan läggas genom R, D, R' och B),

$\wedge S'AC = \wedge S'SC$ (en cirkel kan läggas genom S, A, C och S'),

$\therefore \wedge BPC = \wedge RTS'$.

Vinkeln mellan diagonalerna i fyrhörningen ABCD är alltså lika med vinkeln mellan de mot ABCD svarande linjerna RR' och SS'.

Uppgiften att söka fyrhörningar $ABCD$ med egenskapen [E] ha vi i och med beviset av denna sats överfört i en annan. Vår nya uppgift blir den att finna sträckor $R'S'$ (fig. 12), som äro så belägna, att RR' och SS' äro vinkelräta mot varandra. Såsom nyss påpekades, är riktningen av $R'S'$ för den givna $O_1O_2O_3O_4$ fullt bestämd. Tänka vi oss nu, att $R'S'$ rör sig parallell med sig själv så, att R' ständigt ligger på SQ:s riktningslinje och S' ständigt ligger på RQ:s riktningslinje, kommer skärningspunkten T mellan RR' och SS' att beskriva en viss kurva. Man kan lätt visa, att geometriska orten för T är en hyperbel[1], som har sin medelpunkt i mittpunkten av RS. Hyperbelns ena gren går genom Q och R ($\wedge O_1O_4O_3 < \wedge O_1O_2O_3$), och den andra grenen går genom S. RE och SE_1 (fig. 14), som ha samma riktning som $R'S'$, tangera hyperbeln i R och S. Vi gå ej närmare in på behandlingen av detta ortproblem. För oss är det nämligen endast av intresse att finna de båda punkter på hyperbeln, från vilka RS synes under rät vinkel. Dessa punkter kunna emellertid, såsom vi nu skola visa, erhållas, utan att hyperbeln först behöver uppritas.

I fig. 14 beteckna RE och SE_1, som sagt, två sträckor $R'S'$. Vi avsätta på SQ:s riktningslinje stycken QF och QF_1, vart och ett lika med medelproportionalen till QE och QS. FG och F_1G_1 äro beteckningar på de genom F och F_1

[1] För att T skall genomlöpa *hela* hyperbeln, måste även sådana sträckor $R'S'$ medtagas, vilkas motsvarande fyrhörningar $ABCD$ äro av typen $A_2B_2C_2D_2$ (§ 2).

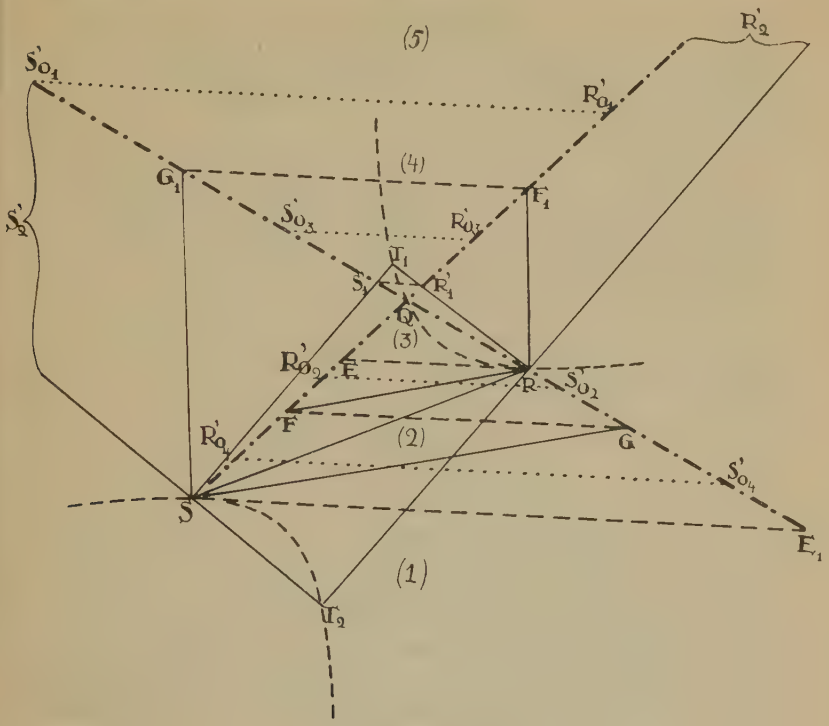


Fig. 14.

gående sträckorna $R'S'$. Då nu

$$QR : QG = QE : QF = QF : QS,$$

bliva linjerna RF och GS parallella med varandra. Vidare är

$$QR : QG_1 = QE : QF_1 = QF_1 : QS.$$

Även linjerna RF_1 och SG_1 bliva alltså sinsemellan parallella.[1] Dessa resultat kunna användas till att visa, att $QG = QG_1 =$ medelproportionalen till QR och QE_1. Vi upprita nu såväl de inre som de yttre bissektriserna till vinklarna FRF_1 och GSG_1. Den av dem bildade fyrhörningen

[1] De mot sträckorna FG och F_1G_1 svarande punkterna T ligga på oändligt avstånd. RF och RF_1 (eller SG och SG_1) angiva därför riktningarna av asymptoterna till den nyss omtalade hyperbeln.

RT_1ST_2 (fig. 14) är tydligen en rektangel. Bissektrisernas skärningspunkter med SQ:s riktningslinje beteckna vi med R_1' och R_2', och deras skärningspunkter med RQ:s riktningslinje beteckna vi med S_1' och S_2'.

Vi påstå, att T_1 och T_2 äro de sökta punkterna, eller med andra ord att $R_1'S_1'$ och $R_2'S_2'$ beteckna tvenne sträckor $R'S'$. Beviset utföra vi för $R_1'S_1'$; för $R_2'S_2'$ blir beviset alldeles analogt. Enligt bissektrissatsen är

$$G_1S_1' : S_1'G = G_1S : SG \text{ och } F_1R_1' : R_1'F = F_1R : RF.$$

Men $G_1S : SG = F_1R : RF$ ($\triangle\triangle\, G_1SG$ och F_1RF äro hälfter av likformiga parallellogrammer),

$$\because\ G_1S_1' : S_1'G = F_1R_1' : R_1'F$$
$$R_1'S_1' \parallel GF.$$

$R_1'S_1'$ betecknar alltså en sträcka $R'S'$.

Sedan vi sålunda konstruerat $R_1'S_1'$ och $R_2'S_2'$, återstår endast att upprita motsvarande fyrhörningar $ABCD$. Av fig. 12 framgår, att vi för att erhålla dessa fyrhörningar endast behöva draga normaler $S_1'A'$, $R_1'B'$, $S_1'C'$ och $R_1'D'$ ($S_2'A''$, $R_2'B''$, $S_2'C''$ och $R_2'D''$) mot sidorna O_4O_1, O_1O_2, O_2O_3 och O_3O_4 respektive. Enligt bekanta satser ur likställighetsläran blir $O_1O_2O_3O_4$ bissektrisfyrhörning till fyrhörningarna $A'B'C'D'$ och $A''B''C''D''$. Att dessa fyrhörningar ha egenskapen $[E]$, följer genast av den sid. 14 omtalade satsen.

Det kan emellertid tänkas, att vid konstruktionen av $A'B'C'D'$ ($A''B''C''D''$) två av normalernas fotpunkter komma att sammanfalla med en av hörnpunkterna i $O_1O_2O_3O_4$, och att således sträckan $R_1'S_1'$ ($R_2'S_2'$) motsvaras av någon av de i § 2 omnämnda trianglarna. Skulle t. ex. C' och D' sammanfalla med O_3, finge vi en vid O_3 rätvinklig triangel, i fig. 3 betecknad med $A_{34}O_3B_{34}$. $\wedge\, A_{34}O_3B_{34}$, som enl. § 2 är $2\,(^{\pi}/_2 - \alpha - \beta)$, vore då $^{\pi}/_2$. Som även $\wedge\, C_{45}O_1D_{45}$ (fig. 3) i detta fall bleve $^{\pi}/_2$, sluta vi, att den andra fyrhörningen med egenskapen $[E]$, $A''B''C''D''$, likaledes överginge i en rätvinklig triangel, nämligen triangeln $C_{45}O_1D_{45}$. Av likheten $2\,(^{\pi}/_2 - \alpha - \beta) = {}^{\pi}/_2$ fås $\alpha + \beta = {}^{\pi}/_4$. Enligt det

gjorda antagandet (7) är emellertid $\alpha+\beta>\pi/4$. För den givna $O_1O_2O_3O_4$ kunna alltså de tre punkterna C', D' och O_3 (A'', B'' och O_1) ej sammanfalla till en. På liknande sätt inses, att punkterna B', C' och O_2 (A'', D'' och O_4) ej kunna sammanfalla till en. Detta skulle nämligen leda till att $\alpha+\delta=\pi/4$, vilket strider mot (7).

Den av sträckorna $R'S'$, som svarar mot triangeln $A_{34}O_3B_{34}$, är tydligen så belägen, att RR' och SS' skära varandra under en vinkel lika med $2(\pi/2-\alpha-\beta)$. Enligt (7) är denna vinkel $<\pi/2$. I fig. 14 är det ungefärliga läget av denna sträcka, som där betecknats med $R'_{O_3}S'_{O_3}$, angivet. I samma figur ha vi också på ett ungefär angivet, var de sträckor äro belägna, som svara mot trianglarna $C_{45}O_1D_{45}$, $A_{23}O_2D_{23}$ och $B_{12}O_4C_{12}$. För läget av $R'S'$ få vi alltså fem områden, nämligen (1), (2), (3), (4) och (5). Områdena ha numrerats på samma sätt som motsvarande fyrhörningar $ABCD$. Vi finna, att fyrhörningen $A'B'C'D'$ är en $A_3B_3C_3D_3$, och att fyrhörningen $A''B''C''D''$ är en $A_1B_1C_1D_1$ ($A_5B_5C_5D_5$).

De i denna paragraf erhållna resultaten sammanfatta vi i satsen: *Det finns bland de fyrhörningar, till vilka den givna $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning, alltid två, som ha egenskapen [E]. Den ena är en $A_1B_1C_1D_1$, den andra är en $A_3B_3C_3D_3$.*

§ 8.

I föregående paragraf förutsatte vi enl. (7), att vinklarna i $O_1O_2O_3O_4$ voro olika. Vi skola nu behandla de fall, då $O_1O_2O_3O_4$ har en av egenskaperna [B] och [C] eller båda dessa egenskaper. Fortfarande förutsätta vi emellertid, att α, β, γ och δ äro $<\pi/2$, och att $O_1O_2O_3O_4$:s minsta vinkel är $>\pi/4$.

1. *$O_1O_2O_3O_4$ har två motstående vinklar lika* ($\angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_4O_3 = \pi/2$). $O_1O_2O_3O_4$ betecknar då en av bissektrisfyrhörningarna $O'_1O'_2O'_3O'_4$ och $O''_1O''_2O''_3O''_4$. Det gäller alltså för oss att kunna påvisa att båda de i § 7 med $A'B'C'D'$ och $A''B''C''D''$ betecknade fyrhörningarna existera.

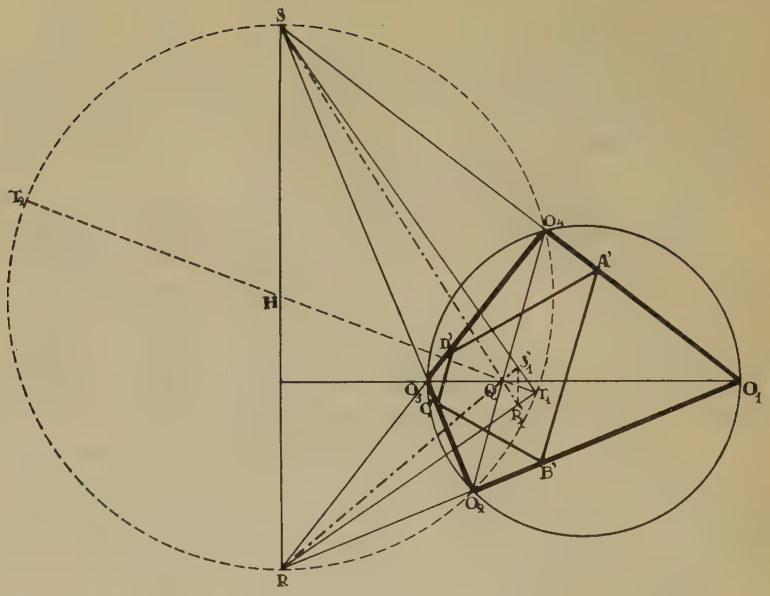


Fig. 15.

Eftersom RO_4 och SO_2 äro höjder i triangeln RO_1S (fig. 15), är RS vinkelrät mot O_1O_3:s riktningslinje. Detsamma gäller om $R'S'$ (fig. 12). Av satsen om diagonalerna i en fullständig fyrsiding, tillämpad på de fullständiga fyrsidingarna $TR'QS'SR$ (t. ex. $T_1R_1'QS_1'SR$ i fig. 15), följer då, att diagonalen TQ eller dess förlängning alltid går genom mittpunkten H på RS, eller med andra ord att T alltid ligger på QH:s riktningslinje.[1] Med RS till diameter upprita vi en cirkel, som skär QH:s riktningslinje i T_1 och T_2. De mot T_1 och T_2 d. v. s. mot sträckorna $R_1'S_1'$ och $R_2'S_2'$ svarande fyrhörningarna $A'B'C'D'$ och $A''B''C''D''$ erhållas sedan liksom i § 7. $A'B'C'D'$ är en $A_3B_3C_3D_3$ och $A''B''C''D''$ en $A_1B_1C_1D_1$.

2. $O_1O_2O_3O_4$ *är ett likbent paralleltrapets.* Såsom redan framhållits i § 7, betecknar $O_1O_2O_3O_4$ då bissektrisfyrhör-

[1] Geometriska orten för T är alltså en rät linje QH eller, om linjen RS medräknas, två varandra skärande linjer.

ningen $O_1''O_2''O_3''O_4''$. Vi ha att visa, att det alltid bland de fyrhörningar $A_3B_3C_3D_3$, till vilka $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisförhörning, finns en, som har egenskapen [*E*]. Enligt § 5 veta vi, att det alltid bland dessa fyrhörningar finns en, som är omskrivbar, nämligen $A_3'B_3'C_3'D_3'$. Denna, som är en drake, har emellertid alltid egenskapen [*E*]. I det mera speciella fallet, då $O_1O_2O_3O_4$ utom egenskapen [*D*] även har egenskaperna [*BC*], är $A_3'B_3'C_3'D_3'$ en romb och har egenskapen [*E*].

Härmed ha vi avslutat beviset för det i början av § 7 gjorda påståendet. Vi ha visat riktigheten av följande sats: ***Egenskapen [E] hos ABCD ger ej någon ny egenskap åt $O_1O_2O_3O_4$.*** I och med denna sats ha vi också funnit det felaktiga i Stuckes tankegång (§ 1). Som tredje länk i Stuckes kedja får man alltid en inskrivbar fyrhörning *C*, vilkens diagonaler äro vinkelräta mot varandra. Nästa länk är likaledes en fyrhörning *C*, men denna har, enligt vad vi nu bevisat, ej någon mera speciell egenskap, som skiljer den från den närmast föregående. Detsamma gäller om varje följande länk i kedjan. Vad den av Stucke till sist framställda frågan beträffar, så ha vi redan i § 5 visat, vilken *speciell* egenskap länken *ABCD* måste ha, för att den efterföljande länken $O_1O_2O_3O_4$ skall bliva omskrivbar.

§ 9.

Denna paragraf är att betrakta som ett tillägg till § 6. Vi vilja nämligen visa, att den metod, vi använt i § 7 för att upprita fyrhörningar $A'B'C'D'$ och $A''B''C''D''$ med egenskapen [*E*], blir betydligt förenklad, om, liksom i § 6, diagonalerna i den givna $O_1O_2O_3O_4$ äro vinkelräta mot varandra.

De från *Q* utgående strålarna *QR*, *QS*, QO_3 och QO_4 (fig. 12) bilda som bekant alltid ett harmoniskt knippe. Är $\angle O_3QO_4 = \pi/_2$, blir alltså $\angle RQO_3 = \angle SQO_3$. Tänka vi oss nu den fullständiga fyrsidingen $O_1'O_2'O_3'O_4'R'S'$ omlagt på andra sidan axeln O_1O_3, kommer den därför att bli likställd med fyrsidingen $O_1O_2O_3O_4RS$ med avseende på punkten *Q*.

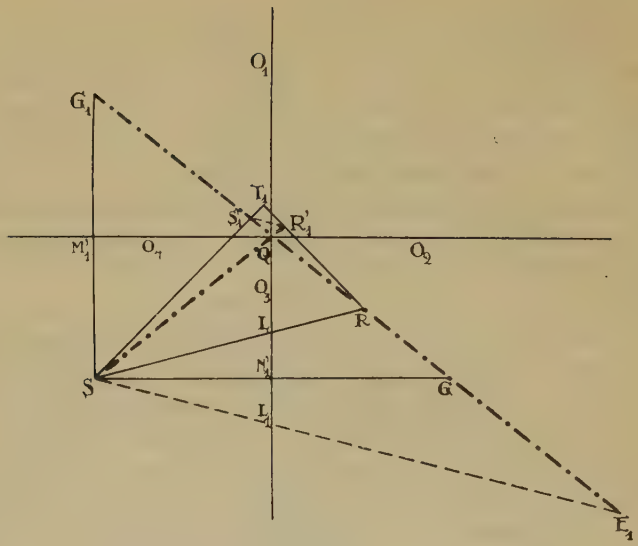


Fig. 16.

I den omlagda figuren blir $R'S' \parallel RS$. Härav sluta vi, att RS och $R'S'$, då $O_1O_2O_3O_4$ har egenskapen [E], bilda samma vinkel med O_1O_3:s riktningslinje, eller med andra ord, att den triangel, som de bilda med denna linje, är likbent. I fig. 16, där för övrigt samma beteckningar användas som i fig. 14, skära alltså SR och SE_1 ($SE_1 \parallel S'R'$ enl. § 7) O_1O_3:s riktningslinje i punkterna L och L_1 så att $\wedge SL_1L = \wedge SLL_1$. Vidare är, såsom nyss framhölls, $\wedge E_1QL_1 = \wedge SQL$,

$$\because \wedge SE_1Q = \wedge RSQ$$
$$\triangle SE_1Q \sim \triangle RSQ,$$
$$E_1Q : SQ = SQ : RQ.$$

Men enl. sid. 15 är $E_1Q : GQ = GQ : RQ$,

$$\because SQ = GQ = G_1Q.$$

Härav följer, att $SG \parallel O_4O_2$ och $SG_1 \parallel O_3O_1$.[1] Enligt fig. 11 är

$$\wedge M_1'SO_4 = \wedge O_4O_1O_3 = \wedge O_4O_2O_3 = \wedge N_1'SO_3,$$

[1] Asymptoterna till den i § 7 omtalade hyperbeln äro alltså i detta fall vinkelräta mot varandra, d. v. s. hyperbeln är liksidig.

och på samma sätt fås $\angle M_3''RO_2 = \angle N_3''RO_3$ (M_3'' och N_3'' beteckna samma punkter som i fig. 10). *Då* $O_1O_2O_3O_4$ *har egenskapen* $[E]$, *sammanfalla alltså bissektriserna till vinklarna* GSG_1 *och* FRF_1 (*fig. 14*) *med bissektriserna till vinklarna* O_1SO_3 *och* O_1RO_3 *respektive. De inre* (*yttre*) *bissektriserna till sistnämnda vinklar äro vinkelräta mot varandra.*

I fig. 17 äro de inre bissektriserna till vinklarna O_1SO_3 och O_1RO_3 uppritade. Den mot deras skärningspunkt T_1 d. v. s. mot sträckan $R_1'S_1'$ svarande fyrhörningen $A'B'C'D'$ har egenskapen $[E]$. Bissektrisernas skärningspunkter med $O_1O_2O_3O_4$:s sidor beteckna vi i enlighet med fig. 17. Vi påstå, att *fyrhörningen* UVU_1V_1 *är en kvadrat.* Av bissektrissatsen och sinusteoremet fås

$$O_4U : UO_3 = O_4S : O_3S = O_2R : O_3R = O_2V : VO_3,$$
$$\therefore\ UV \parallel O_4O_2.$$

På samma sätt blir $U_1V_1 \parallel O_4O_2$ och $UV_1 \parallel O_3O_1 \parallel VU_1$

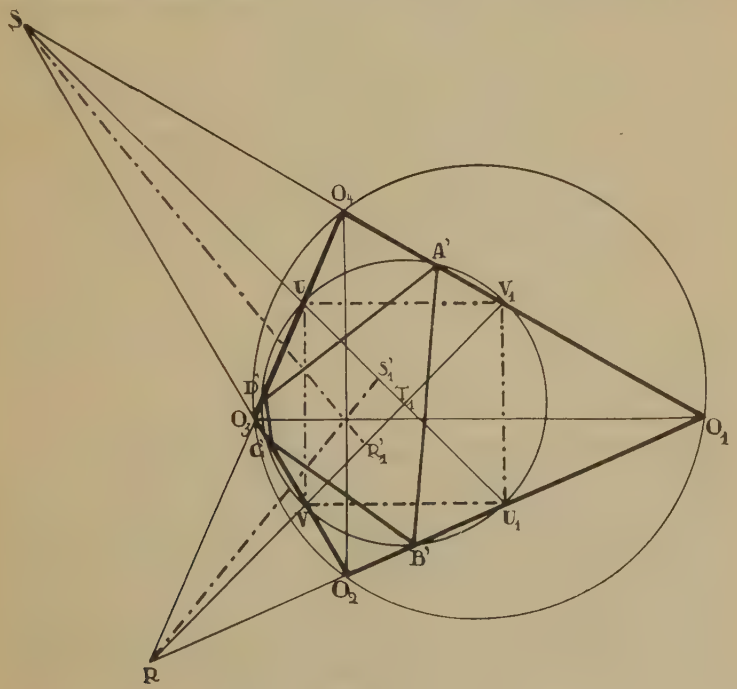


Fig. 17.

UVU_1V_1 måste alltså vara en rektangel. Eftersom diagonalerna UU_1 och VV_1 äro vinkelräta mot varandra, är UVU_1V_1 den i $O_1O_2O_3O_4$ inskrivna kvadraten.

Det äger ett intressant samband rum mellan $A'B'C'D'$ och kvadraten UVU_1V_1. Man kan nämligen visa, att båda fyrhörningarna ha samma omskrivna cirkel. Lättast sker detta genom att omskriva en cirkel kring kvadraten och visa, att cirkelns fyra andra skärningspunkter med $O_1O_2O_3O_4$:s sidor ge en $A_3B_3C_3D_3$ med egenskapen [*E*]. *Bissektrisernas skärningspunkt* T_1 *är alltså medelpunkt till den kring* $A'B'C'D'$ *omskrivna cirkeln.* Ett liknande samband äger rum mellan fyrhörningen $A''B''C''D''$ och den kvadrat, som har sina hörnpunkter på förlängningarna av $O_1O_2O_3O_4$:s sidor.

Trianglar, där sidornas och ytans mätetal äro hela tal och sidorna bilda aritmetisk serie.

Av HJ. NILSSON.

Det är tillräckligt att söka sådana trianglar, där sidornas mätetal ej innehålla någon gemensam heltalsfaktor.

Om triangelns omkrets betecknas med $2p$, blir den mellersta sidan $\frac{2p}{3}$. Om ytans mätetal skall vara helt, måste enligt Herons formel p vara ett helt tal. Den mellersta sidans mätetal blir alltså jämnt, differensens och de två återstående sidornas mätetal udda, ty annars skulle sidornas mätetal innehålla 2 såsom gemensam faktor. Om sidorna betecknas med $2l-d$, $2l$, $2l+d$, skola alltså l och d vara hela tal och relativa primtal.

Om höjden (h) mot den mellersta sidan faller inom triangeln, kunna vi beteckna denna sidas delar med $l+x$ och $l-x$. Då är

$$h^2=(2l+d)^2-(l+x)^2=(2l-d)^2-(l-x)^2 \quad . \quad . \quad (1)$$

alltså $$x=2d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

och $$h^2=3(l^2-d^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Faller höjden utom triangeln, kunna vi beteckna de segment, i vilka den delar den motstående sidan, med $x+l$ och $x-l$. Då likheten (1) ej undergår någon förändring, om $l-x$ utbytes mot $x-l$, behöva vi ej särskilt betrakta detta fall.

Likheten (3) kan ock lätt härledas med tillhjälp av Herons formel.

Enligt (2) är x ett helt tal, alltså $l+x$ och $l-x$ hela tal. Om h skall vara rationellt, måste h vara helt tal och delbart med 3.

Sätt $h=3y$. Likheten (3) blir då

$$3y^2=l^2-d^2=(l+d)(l-d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Här måste antingen $l+d$ eller $l-d$ vara delbart med 3. Bäggedera kunna icke vara delbara med 3, då l och d skola vara relativa primtal. Om vi tillåta d vara negativt, är det likgiltigt, vilken av faktorerna vi antaga delbar med 3. Låt oss antaga, att det är faktorn $l+d$. Vi ändra likheten (4) till en analogi

$$\frac{l+d}{3y}=\frac{y}{l-d}.$$

Sätta vi vartdera av bråken $=\frac{\alpha}{\beta}$, där α och β äro hela positiva tal och relativa primtal, erhålla vi

$$l+d=\frac{3\alpha}{\beta}\cdot y; \quad l-d=\frac{\beta}{\alpha}\cdot y,$$

varav

$$l=\frac{3\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\cdot y$$

$$d=\frac{3\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\cdot y.$$

Då $l-d$ ej får vara delbart med 3, få vi utesluta β-värden, som äro multipler av 3.

Vi få två fall.

1) α och β äro bägge udda tal.

Då är $3\alpha^2+\beta^2$ delbart med 4 och $3\alpha^2-\beta^2$ delbart med 2, men ej med 4. Då α och β äro relativa primtal och β ej delbart med 3, kunna $3\alpha^2+\beta^2$ och $\alpha\beta$ ej innehålla någon gemensam faktor. Då måste bråket $\frac{y}{\alpha\beta}$ vara ett helt tal och eftersom l och d skola vara relativa primtal, måste det vara $=1$. Vi få alltså

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha\beta \\ l &= \frac{3\alpha^2+\beta^2}{2} \\ d &= \frac{3\alpha^2-\beta^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Här är l jämnt, y och d udda.

2) α och β ha olika paritet.
I detta fall bli talen $3\alpha^2 \pm \beta^2$ udda och

$$\left.\begin{aligned} y &= 2\alpha\beta \\ l &= 3\alpha^2+\beta^2 \\ d &= 3\alpha^2-\beta^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Här är y jämnt. l och d udda.

Beteckna vi triangelns sidor $2l-d$, $2l$, $2l+d$ med a, b, c och ytan med T, innehålles den fullständiga lösningen av vår uppgift i följande två system av likheter:

1)
$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{3(\alpha^2+\beta^2)}{2} \\ b &= 3\alpha^2+\beta^2 \\ c &= \frac{9\alpha^2+\beta^2}{2} \\ T &= \frac{3}{2}\cdot\alpha\beta b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

där α och β äro udda hela tal, relativa primtal, β ej deldart med 3.

2)
$$\left.\begin{aligned} a &= 3(\alpha^2+\beta^2) \\ b &= 2(3\alpha^2+\beta^2) \\ c &= 9\alpha^2+\beta^2 \\ T &= 3b\cdot\alpha\cdot\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

där α och β äro hela tal, det ena udda, det andra jämnt, relativa primtal, β ej delbart med 3.

I första fallet är b delbart med 4, i andra med 2. Ytans mätetal är alltså alltid delbart med 6. Eftersom l och d äro relativa primtal, äro sidornas mätetal, tagna två och

två, även relativa primtal, a och c äro udda tal, a delbart med 3.

Liksom i alla trianglar, där sidorna och ytan mätas av hela tal, äro mätetalen för höjdlinjerna, radierna i den inskrivna, den omskrivna, de vidskrivna cirklarna rationella. Äro, som vi antaga, sidorna dessutom i aritmetisk progression, bliva alltid mätetalen för höjden mot den mellersta sidan (h_b), för den inskrivna cirkelns radie (r) och för radien i den vidskrivna cirkel, som tangerar den mellersta (r_b), hela tal.

Man har nämligen i fallet 1)

$$h_b=3\alpha\beta,\quad r=\alpha\beta,\quad r_b=3\alpha\beta,$$

i fallet 2) $\quad h_b=6\alpha\beta,\quad r=2\alpha\beta,\quad r_b=6\alpha\beta.$

Man finner $\quad h_b=r_b=3r,$

vilka likheter lätt kunna visas gälla för alla trianglar, där sidorna äro i aritmetisk serie.

Av likheterna (7) erhålles

$$p-a=3\alpha^2,\quad p-c=\beta^2$$

och av (8) $\quad p-a=6\alpha^2,\quad p-c=2\beta^2.$

Radierna i de två vidskrivna cirklar, som tangera resp. a och c bliva i varje fall

$$r_a=\frac{b}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha},\quad r_c=\frac{3b}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$

Då b ej är delbart med α eller β men alltid med 2, bliva dessa radiers mätetal bråk med nämnarna α och β resp. och hela tal endast om α, resp. $\beta=1$.

Betyda A och C de mot resp. a och c stående vinklarna, finner man

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}=\frac{3\alpha}{\beta}$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Varav följer $\quad \cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}=3,$ vilken likhet lätt visas

gälla för alla trianglar, där sidorna a, b, c bilda aritmetisk serie.

Vinkeln A är trubbig, om $\cot\frac{A}{2} < 1$, alltså om $\beta > 3\alpha$.

Vinkeln C är trubbig, om $\cot\frac{C}{2} < 1$, alltså om $\beta < \alpha$.

Triangeln blir alltså spetsvinklig, om $\alpha < \beta < 3\alpha$
trubbvinklig, om $\beta < \alpha$ eller $\beta > 3\alpha$
rätvinklig, om $\alpha = \beta = 1$

(fallet $\beta = 3\alpha$ är uteslutet, då β ej får vara multipel av 3).

Följande tabell angiver mätetalen för sidorna, ytan, den inskrivna cirkelns radie och differensens numeriska värde för de 6 minsta trianglarna. Sidorna beräknas enligt (7) eller (8), allt eftersom α och β ha samma eller olika paritet.

α	β	$\lvert d\rvert$	a	b	c	r	T
1	1	1	3	4	5	1	6
1	2	1	15	14	13	4	84
1	4	13	51	38	25	8	456
1	5	11	39	28	17	5	210
2	1	11	15	26	37	4	156
3	1	13	15	28	41	3	126

Som synes förekommer i ingen av dessa trianglar någon differens, vars numeriska värde ligger mellan 1 och 11. Möjliga värden på d äro enligt (5) och (6) positiva och negativa hela tal av formen $\frac{3\alpha^2 - \beta^2}{2}$, om α och β äro udda och av formen $3\alpha^2 - \beta^2$, om α och β ha olika paritet. Sådana äro primtalen 1, 11, 13, 23, 37 o s. v. och produkter av dessa.

Genom att uttrycka olika element i trianglarna som funktioner av α och β kan man, såsom förut vid några tillfällen visats, finna relationer mellan dessa element, gällande för alla trianglar, där sidorna äro i aritmetisk serie. Jag anför några lämpliga skolproblem.

Visa, att sidorna i en triangel bilda aritmetisk serie,

1) om en av de vidskrivna cirklarna har 3 gånger så stor radie som den inskrivna.
2) om en av triangelns höjder är 3 gånger så stor som den inskrivna cirkelns radie. (Speciellt fall: den liksidiga triangeln.)
3) om höjden mot en sida är lika med radien i den vidskrivna cirkel, som tangerar denna.
4) om rektangeln av två vidskrivna cirklars radier är $=\frac{3}{4}$ av kvadraten på den sida, som tangeras av den tredje.
5) om produkterna av cotangenterna för två vinklars hälfter $=3$.

Bevis.

1) $$\frac{T}{p-b}=3\cdot\frac{T}{p},\quad p=3(p-b),\quad 2b=a+c.$$

2) $$\frac{2T}{b}=3\cdot\frac{T}{p},\quad 2p=3b,\quad 2b=a+c.$$

3) $$\frac{2T}{b}=\frac{T}{p-b},\quad 2(p-b)=b,\quad 2b=a+c.$$

4) $$4r_a\cdot r_c=\frac{4\cdot T^2}{(p-a)(p-c)}=4p(p-b)=(a+c+b)(a+c-b)=$$
$$=(a+c)^2-b^2=3b^2,\quad a+c=2b.$$

5) $$\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=\frac{p}{p-c}=3;$$
$$2b=a+c.$$

Satsernas omvändning bevisas också lätt.

Vi skola nu något närmare undersöka fallet $d=\pm 1$.

Trianglar, där sidornas mätetal äro tre konsekutiva hela tal och därjämte ytans mätetal helt.

Enligt likheterna (5) och (6) är d antingen $=\frac{3\alpha^2-\beta^2}{2}$ eller $3\alpha^2-\beta^2$. Uppgiften är då att bestämma positiva heltalsvärden på α och β, som satisfiera någon av likheterna

$3\alpha^2-\beta^2=\pm 2$, om α och β bägge äro udda
och $3\alpha^2-\beta^2=\pm 1$, om α och β ha olika paritet.
Då β är av formen $3m\pm 1$ är β^2 av formen $3m+1$ (m helt tal).
Likheterna $3\alpha^2-\beta^2=-2$ och $3\alpha^2-\beta^2=+1$
kunna då ej ha några heltalslösningar. Vi skola således antingen hava $3\alpha^2-\beta^2=2$ (9), där α och β äro udda eller $3\alpha^2-\beta^2=-1$ (10), där α och β ha olika paritet.

Om α_n, β_n äro ett par värden på α och β, som satisfiera (9), satisfieras (10) av α_{n+1}, β_{n+1}, där

$$\alpha_{n+1}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}, \qquad \beta_{n+1}=\frac{3\alpha_n+\beta_n}{2} \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Om α_n, β_n satisfiera (10), satisfieras (9) av α_{n+1}, β_{n+1}, där

$$\alpha_{n+1}=\alpha_n+\beta_n, \qquad \beta_{n+1}=3\alpha_n+\beta_n \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Eftersom vidare $3(2\alpha_n+\beta_n)^2-(3\alpha_n+2\beta_n)^2=3\alpha_n^2-\beta_n^2$
blir likheten (9) eller (10), om den satisfieras av α_n, β_n också satisfierad av α_{n+2}, β_{n+2}, där

$$\alpha_{n+2}=2\alpha_n+\beta_n, \quad \beta_{n+2}=3\alpha_n+2\beta_n \quad . \; . \; . \quad (13)$$

Man finner att

$$\alpha_{n+2}>\alpha_{n+1}>\alpha_n \text{ och } \beta_{n+2}>\beta_{n+1}>\beta_n$$

så framt $\alpha_n<\beta_n<3\alpha_n$, vilket enligt (9) och (10) måste vara fallet så snart $\alpha_n>1$. Ty då $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ antingen är lika med $\sqrt{3-\frac{2}{\alpha_n^2}}$ eller $\sqrt{3+\frac{1}{\alpha_n^2}}$, kommer $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ att med växande α_n närma sig $\sqrt{3}$ och redan för $\alpha_n=2$ finner man

$$\frac{3}{2}<\frac{\beta_n}{\alpha_n}<2.$$

Om vi känna *en* lösning till (9) eller (10), kunna vi alltså framställa oändligt många.

Då nu likheten (9)

satisfieras av $\alpha_1=1,\ \beta_1=1$

satisfieras (10) av $\alpha_2=1,\ \beta_2=2$ (enligt 11)

(9) av $\alpha_3=3,\ \beta_3=5$ (enligt 12 eller 13)

(10) av $\alpha_4=4,\ \beta_4=7$ (enligt 11)

o. s. v.

Vi ordna dessa värden i två serier *A* och *B*. *A* innehåller de samtidigt udda värdena på α och β, som satisfiera (9), *B* de av olika paritet, som satisfiera (10).

A		*B*	
α	β	α	β
1	1	1	2
3	5	4	7
11	19	15	26
—	—	—	—

Innehållas nu alla möjliga positiva heltalsvärden på α och β i dessa båda serier? Låt α_n, β_n vara en lösning ($\alpha_n > 1$). Vi påstå, att då måste ock finnas en lösning α_{n-2}, β_{n-2}, där

$$\alpha_{n-2}=2\alpha_n-\beta_n,\quad \beta_{n-2}=2\beta_n-3\alpha_n \quad . \ . \ . \quad (14)$$

och där vidare

$$0<\alpha_{n-2}<\alpha_n \text{ och } 0<\beta_{n-2}<\beta_n.$$

Att α_{n-2}, β_{n-2} är en lösning framgår av identiteten

$$3(2\alpha_n-\beta_n)^2-(2\beta_n-3\alpha_n)^2=3\alpha_n^2-\beta_n^2.$$

För att olikheterna

$$2\alpha_n-\beta_n<\alpha_n,\ 2\beta_n-3\alpha_n<\beta_n$$

skola gälla, fordras att

$$\alpha_n<\beta_n<3\alpha_n.$$

För att $2\alpha_n-\beta_n$ och $2\beta_n-3\alpha_n$ skola vara >0 fordras, att

$$\tfrac{3}{2}\alpha_n<\beta_n<2\alpha_n.$$

vilken olikhet förut visats gälla så snart $\alpha_n>1$.

Om alltså $\alpha_n\beta_n$ ($\alpha_n>1$) utgör en positiv heltalslösning till (9) eller (10), måste det finnas en annan α_{n-2}, β_{n-2},

där $\alpha_{n-2} < \alpha_n$, $\beta_{n-2} < \beta_n$. Är $\alpha_{n-2} > 1$, finnas ett par ännu mindre positiva heltalsvärden, som satisfiera samma likhet o. s. v. Denna serie kan fortsättas, tills man kommer till ett α-värde $=1$. Men mot $\alpha=1$ svarar endast $\beta=1$ enligt (9) och $\beta=2$ enligt (10). Av (14) erhålles

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-2} + \beta_{n-2}, \quad \beta_n = 3\alpha_{n-2} + 2\beta_{n-2}.$$

Bildar man då enligt (13) *A*- eller *B*-seriens värden utgående från $\alpha=1$, $\beta=1$ eller $\alpha=1$, $\beta=2$, måste $\alpha_n \beta_n$ innehållas i en av dessa serier.

Då α och β äro beroende av varandra, kunna triangelns sidor angivas såsom funktioner av den ena, exempelvis β. Vi söka då först en regel för att bilda β-värdena, oberoende av α-värdena. Om vi indicera värdena, så att $\beta_1=1$, $\beta_2=2$, $\beta_3=5$ o. s. v., få vi följande regel.

Om n är udda, är $\beta_{n+2} = 2 \cdot \beta_{n+1} + \beta_n$
om n är jämnt, är $\beta_{n+2} = \beta_{n+1} + \beta_n$ . . . . . (15)

I förra fallet är nämligen

$$\beta_{n+1} = \frac{3\alpha_n + \beta_n}{2} \quad \text{enligt (11)}$$

$$\beta_{n+2} = 3\alpha_n + 2\beta_n \quad \text{enligt (13)}$$

I senare fallet är
$$\beta_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n \quad \text{enligt (12)}$$
$$\beta_{n+2} = 3\alpha_n + 2\beta_n \quad \text{enligt (13).}$$

Om α och β äro udda, är enligt (7)

$$b = 3\alpha^2 + \beta^2$$

och enligt (9) $3\alpha^2 - \beta^2 = 2.$

Varav $b = 2\beta^2 + 2$ . . . . . (16)

Om α och β äro, det ena udda, det andra jämnt, är

enligt (8) $b = 2(3\alpha^2 + \beta^2)$

och enligt (10) $3\alpha^2 - \beta^2 = -1$

varav $b = 4\beta^2 - 2$ . . . . . (17)

Härav följer, att om n är udda, beräknas b enligt formeln (16) och, om n är jämn, enligt (17), varvid β-värdena beräknas så: $\beta_1=1$, $\beta_2=2$, de följande β-värdena enligt (15). Alltså på följande sätt:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 1 & b &= 2\cdot 1^2+2 = 4\\
\beta_2 &= 2 & b &= 4\cdot 2^2-2 = 14\\
\beta_3 &= 2\beta_2+1 = 5 & b &= 2\cdot 5^2+2 = 52\\
\beta_4 &= \beta_3+\beta_2 = 7 & b &= 4\cdot 7^2-2 = 194\\
\beta_5 &= 2\beta_4+\beta_3 = 19 & b &= 2\cdot 19^2+2 = 724
\end{aligned}$$ o. s. v.

Följande tabell upptager sidorna och ytan för de 6 minsta trianglarna.

a	b	c	T
3	4	5	6
13	14	15	84
51	52	53	1 170
193	194	195	16 296
723	724	725	226 974
2 701	2 702	2 703	3 161 340

Det tyckes av tabellen framgå, att sidornas mätetal antingen sluta på resp. 1, 2, 3 eller 3, 4, 5. Det kan lätt visas, att inga andra slutsiffror äro möjliga. Av sättet för bildandet av α- och β-värdena följer, att slutsiffrorna av α och β måste visa periodicitet. För udda n blir sista siffran av β_n 1, 5 eller 9. Är n jämnt, slutar β på 1, 2, 6 eller 7. I förra fallet är $b=2\beta^2+2$, i senare $=4\beta^2-2$, i bägge fallen slutar b antingen på 2 eller 4 och sidornas mätetal alltså antingen på 1, 2, 3 eller 3, 4, 5 resp. Vidare visas lätt, att T måste sluta på 0, om b slutar på 2, och på 4 eller 6, om b slutar på 4. Om b slutar på 2, sluta nämligen p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ på resp. 3, 2, 1, 0 eller 8, 7, 6, 5, alltså T^2 och T på 0. Slutar b på 4, sluta p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ på resp. 1, 8, 7, 6 eller 6, 3, 2, 1, alltså T^2 på 6 och T på 4 eller 6.

Om fysiska laborationer vid Tekniska läroverket i Örebro.[1]

Av OTTO GALLANDER.

Vid Tekniska läroverket i Örebro utföres arbetet under gynnsamma förhållanden. Anslagen av allmänna medel till undervisningsmateriel äro relativt rikliga, staden vidtager vid behov beredvilligt förändringar av lokaler och deras inredning och skolan har frikostiga vänner både inom och utom samhället. Vidare ha lärarna stor frihet att ordna undervisningen, som dem bäst synes. En redogörelse för hur fysiklaborationerna under sådana förhållanden bedrivas torde kunna påräkna intresse och möjligen vara till nytta för någon, som under svårare förhållanden kämpar för tidsenligt ordnande av fysikundervisningen.

Då man börjar införa laborationer i fysik, har man i vanliga fall ont om apparater. Det fysiska kabinettet är måhända försett med nödig utrustning, för att läraren därmed skall kunna inför klassen demonstrera de fenomen och lagar, som genomgås i skolan. Blott *en* apparat av varje slag behöver då finnas. Följden härav är, att alla laboranter eller laborationsgrupper måste göra olika försök och således samtidigt laborationer utföras, som beröra nästan alla delar av fysiken.

I vårt land torde alla fysiklärare vara av den meningen, att en laboration har ringa värde, om ej laboranten genomgått motsvarande del av fysiken i en systematisk framställning. Laborationerna måste således under dylika förhållanden införas, sedan det mesta av fysiken genom-

[1] Bearbetning av ett föredrag vid sammanträde med rektorer och lärare vid de tekniska läroverken 1920.

gåtts. Skall ett avsevärt antal laborationer utföras, blir då arbetet med laborationsredogörelserna mycket betungande för eleverna — och om dessa redogörelsers vikt äro väl all världens handledare ense.

I Örebro Tekniska elementarskola började jag på detta sätt med frivilliga laborationer under läsåret 1906—07. Som intet fysiskt laboratorium då ännu fanns, fingo laboranterna arbeta i fysiska lärosalen och fysiska kabinettet.

Det möter avsevärda svårigheter att starta försöken, då laborationerna anordnas på detta sätt. Ofta stå laboranter sysslolösa i avvaktan på hjälp, innan de fått laborationsvana, trots det att läraren gör sitt bästa.

Till mycket större nytta bli emellertid laborationerna, om de åtminstone i början direkt anslutas till den systematiska undervisningen. Arbetet med redogörelserna blir också mindre kännbart, då det fördelas över flera år.

Från de vanliga lektionerna kan man då utesluta en del tidsödande försök för viktiga konstantbestämningar o. d., om dessa i stället utföras som laborationer, vilket ej tar avsevärt mer tid. På sådant sätt får man också synnerligen lämpliga laborationsuppgifter. Då naturligtvis alla elever måste på ena eller andra sättet ha lärt känna dylika experiment, måste laborationerna i detta fall vara obligatoriska.

Vid en vanlig lektion före laborationen givas då nödiga instruktioner åt hela klassen på en gång, vilket ej tar mycket tid. Då lärjungarna sedan komma in på laboratoriet, kunna de utan svårighet genast gripa sig an med arbetet på egen hand.

Detta sätt att anordna laborationer kräver, att flera apparater av samma slag anskaffas och att skolan har ett ändamålsenligt laboratorium. Vid laborationer för nybörjare är det lämpligt att låta två lärjungar arbeta tillsammans. En lärare kan då på en gång sköta ända till 8 laborantgrupper, d. v. s. 16 elever. Då klassen består av 30 stycken, delas den i tvenne avdelningar. Den ena av dessa laborerar på ordinarie skoltid, den andra på eftermiddagen

samma dag eller dagen förut. Om man inför sådana laborationer, som kräva 2 timmar, måste läsordningen uppgöras så, att dubbeltimmar i fysik finnas.

Är laboratoriet tillräckligt stort och finnes medel för att anskaffa tillräckligt med apparater, är det naturligtvis förmånligare att ha hela klassen på den ordinarie lästiden. Läsordningen skall då göras upp så, att en fysiklärare alltid är ledig att kunna tjänstgöra som assistent åt läraren i en klass på de tider i de olika klasserna, som äro avsedda för laborationer. Det är givetvis förmånligare för en fysiklärare att så assistera en kamrat på vanlig lästid än att allt emellan på eftermiddagar laborera med hälften av egen klass.

De apparater, som behövas för de grundläggande laborationerna i hydrostatik, aerostatik, mekanik och värmelära, äro billiga och lätta att anskaffa. Man behöver 8 resp. 15 apparater av varje slag, beroende på om man arbetar med halva eller hela klassen på en gång.

Vid de elektriska laborationerna krävas vanligen apparater som äro dyra. Man kan då minska behovet av instrument genom att dela laborationsavdelningen i två hälfter, som få olika ämnen, och nästa laboration byta uppgifter. Så t. ex. kan halva avdelningen göra volt-meterkomparation, medan den andra hälften har ampère-meterkomparation, den ena mäta motstånd med bryggor, medan den andra använder volt-ampèremeter-metoden.

Då man kommer till maskinlaborationer, nödgas nog alla elementära skolor hava stora laborantavdelningar och laborationerna bliva i sådana fall ej mycket skilda från demonstrationslektioner.

Vid Tekniska elementarskolan i Örebro ha anvisats åt fysiken 5 veckotimmar i första klassen, 4 i andra och 3 i tredje klassen — mekanik är ett särskilt ämne med 5 veckotimmar, varför fysiklärarna blott behöva genomgå de experimentella fakta, varpå mekaniken bygger. I närmaste anslutning till de teoretiska lektionerna utföras 12 laborationer i första klassen. Vid den första bestämmes spec.

vikten för kroppar av enkel geometrisk form. Eleverna få då lära sig att handskas med skjutmått, avläsa dess nonie samt få den första övningen i att väga. Vid den andra bestämmes spec. vikten genom tillämpning av Archimedes princip. Vätskors spec. vikt bestämmes medelst hydrostatisk våg, pyknometer, kommuniserande kärl och areometer.

För experimentell prövning av Boyles lag användas enkla apparater, som vi själva tillverkat.

Vid laborationer över kraftparallellogrammen och momentlagen använda vi fjädervågar från Salter & Co., London.

Vid bestämning av utvidgningskoefficienten för fasta kroppar använda vi hemmagjorda apparater, på vilka mikrometrar monterats för uppmätning av förlängningen.

Termometrars fundamentalpunkter[1], spec. värme, smältvärme och ångbildningsvärme bestämmas med enkla hjälpmedel. Värmets mek. ekvivalent bestämmes medelst en mycket billig anordning, vilken beskrivits i en uppsats, som tillhandahålles av Svanström & C:o, Stockholm. På en timme kan man med denna metod göra minst två bestämningar: en med blyhagel, en med kullagerkulor.

I andra klassen utföras 16 laborationer. Vid ampère- och voltmeterkomporation få eleverna lära sig att hantera instrument av olika konstruktion. Som normalinstrument användas vridspoleinstrument från Siemens-Schuckert, Berlin, och som komparerade instrument huvudsakligen mjukjärns- och dynamometerinstrument. Vid bryggmätningar ha små vridspolegalvanometrar från Siemens-Schuckert visat sig bäst. Wheatstones bryggor ha vi själva gjort av en Faberlinjal (1 m) och prima mättråd från Siemens-Schuckert.

Vår skola äger 3 motorgeneratorer från A. S. E. A., Västerås, och på dessas generatorer finnas såväl kommutatorer för uttagning av likström som ringar för uttagning av enfas- och trefasström.

[1] Obs.! Prövning av kvicksilverpelarens längd, då olika längder av termometern uppvärmas.

Magneterna ha dubbla lindningar, så att de kunna användas både som skunt-, serie- och kompoundmaskiner. Två av generatorerna äro försedda med Joubertska skivor.

Vid den för alla fackavdelningar gemensamma kursen göra vi följande försök med dessa omformare.

Upptagande av tomgångs-karaktäristika för en likströmsgenerator med separat magnetisering; yttre karaktäristika för en shunt-, serie- och kompoundmaskin; upptagande av en växelspinningskurva och en växelströmskurva, parallellkörning av likströmsmaskiner, parallellkörning av växelströmsmaskiner (fasning); bromsprov och undersökning av en växelströmskrets. I tredje klassen ha vi 8 à 10 laborationer i fysik. Ämnena för dessa äro valda från olika delar av fysiken och avse att repetera medelst svårare uppgifter. Av de apparater, som härvid komma till användning, har skolan blott *en* av varje slag, och de olika grupperna ha därför skilda ämnen. I tredje klassen möter detta ej några svårigheter, dels emedan hela den systematiska kursen där genomgåtts, dels emedan lärjungarna genom laborationerna i de föregående klasserna förvärvat en viss laborationsvana och veta, var olika utensilier ha sin plats och sålunda kunna reda sig med relativt liten hjälp.

De olika grupperna tilldelas ett antal av följande ämnen: bestämning av elasticitetsmodulen, tröghetsmoment, förbränningsvärme för fotogen eller lysgas med Junkers kalorimeter, toners svängningstal, fotometri med Lummer-Brodhuns fotometer, fokaldistanser, sackarimetri, isolationsmätning, jordledningsmotstånd hos åskledare, karaktäristika för en transformator, självinduktionskoefficienter och kapaciteter, magnetiska motståndet hos en sluten magnetisk krets,[1] komparation av wattmeter, komparation av cos-φ-mätare, lagning av instrument. I tredje klassen har den elektriska fackavdelningen dessutom en fyratimmars laboration i veckan under ledning av läraren i elektroteknik.

Då en lärare i fysik vanligen undervisar i någon avdel-

[1] Se denna tidskrifts årg. 2, sid. 101.

ning av alla 3 klasserna, har han således cirka $36 \times 30 = 1080$ laborationsredogörelser om året att korrigera. Dessutom har han en mängd provräkningar i fysik och matematik eller mekanik. Det är därför ej möjligt att få tid att kontrollera sifferräkningarna i alla laborationsredogörelser. Vid betygssättningen fäster jag mig ej vid resultatets grad av noggrannhet för att ej fresta eleverna att fuska med de avlästa värdena. Däremot lägges stor vikt vid att de figurer, som bifogas redogörelsen, riktigt återgiva allt väsentligt av försöksanordningen samt vid att texten är omsorgsfullt utarbetad. Lärjungarnas förmåga att avläsa olika instrument kontrolleras genom en provlaboration i slutet av läsåret. Dessa laborationer äro ännu föga utvecklade i Örebro och ha blott bestått uti att några instrument av olika slag t. ex. ett skjutmått, en kvicksilverbarometer, en mikrometer, areometrar, en ampèremeter med shunt, en voltmeter med förkopplingsmotstånd etc. äro utställda på laboratoriet. Eleverna få i tur och ordning avläsa instrumenten och vid utgången från laboratoriet lämna sina protokoll. På *en* timme hinner en klass på 30 elever då att avläsa 8 à 10 instrument.

Beräkningen av den noggrannhet, som kan erhållas vid olika försök, kommer att behandlas i en följande uppsats.

Några synpunkter på undervisningen i elektrokemi i skolan.

Av G. STARCK.

1. De elektromotoriska krafterna.

Behandlingen av de galvaniska elementen grundas sedan länge i den i de svenska realgymnasierna använda läroboken i fysik på Nernsts teori. De däri utvecklade åsikterna rörande uppkomsten av en potential differens mellan metall och metallsaltlösning framläggas, metallernas elektrolytiska lösningstryck införas, den olika storleken av detsamma för olika metaller visas vara den för elektromotoriska kraftens uppkomst bestämmande faktorn. I det följande skall framläggas ett (även praktiskt prövat) försök att giva åt behandlingen av detta ämne en i någon mån kvantitativ, dock för skolan alltjämt lämpad, fastare gestalt. Detta mål kan givetvis icke uppnås annat än genom införandet av Nernsts formel och med denna sammanhängande siffermaterial.

Nernsts formel för potentialdifferensen mellan en elektrod och en lösning innehållande joner av samma ämne:

$$E = \frac{RT}{nF} lu \frac{P}{p}$$

(R=den elektrolytiska gaskonstanten, T=absoluta temp., n=jonens atomvärde, F=96 490 coul., P=metallens lösningstryck, p=jonens osmotiska tryck), förefaller vid första påseendet föga lämpad för skolstadiet och är det ej heller i denna form. Men om man avkläder formeln en del i detta samband fullständigt oväsentligt utanverk, så är den i fråga om sina omedelbara konsekvenser och sin praktiska

tillämpning sällsynt enkel och genomskinlig. En sträng härledning hör inte skolundervisningen till; i den enkla gestalt, som här är det tillräckliga medlet att skänka en verklig förståelse av de galvaniska elementen, kan man komma till formeln på två vägar. Antingen gör man på grundval av vissa grundantaganden formeln plausibel och verifierar den med det försök, som nedan skall beskrivas. Eller ock börjar man med detta försök och får då omedelbart uttrycket för den elektromotoriska kraften av ett koncentrationselement, härav uttrycket för potentialdifferensen mellan metall och lösning, och man redogör nu för uppfattningen av hur denna potentialdifferens kommer till stånd. Förf. föredrager det förra tillvägagångssättet, bl. a. emedan det senare förutsätter en större matematisk »rörlighet» än man i allmänhet kan påräkna hos auditoriet — tredje ringen.

Vid denna härledning får man taga hänsyn till att jonernas osmotiska tryck är ett begrepp, som i allmänhet införes först långt senare, detsamma ersättes av den därmed proportionella jonkoncentrationen. Likaså undviker jag i detta sammanhang att tala om metallernas lösningstryck, som ingenting annat är än ett osmotiskt tryck.

Vi börja således som vanligt med att (på tavlan) doppa ned ett zinkbleck i en vätska, vari zink kan förekomma som jon, och förklara uppkomsten av en negativ potentialdifferens mellan zink och vätska, som karakteriserar jämviktstillståndet.

Zink $+2$ pos. enhetsladdningar $\rightleftarrows$ zinkjon.

Om vi nu doppa ned blecket i en lösning av ett zinksalt, en lösning, som redan på förhand innehåller zinkjoner, så kommer detta jämviktstillstånd att uppnås tidigare än ovan, m. a. o. potentialdifferensen blir i detta fall numeriskt mindre. Det är t. o. m. tänkbart, att, om zinkjonkoncentrationen är tillräckligt stor jämvikten uppnås från andra sidan, d. v. s. att zink utfaller och potentialdifferensen byter tecken.

På vilka faktorer kommer nu potentialdifferensens storlek att bero? Enligt ovanstående resonnemang först och främst på lösningens jonkoncentration och tydligen växer potentialdifferensen metall—lösning algebraiskt då jonkoncentrationen växer. Vi beteckna jonkoncentrationen med c. Vidare måste den bero av metallens natur. Vi kunna inte vänta oss, att koppar t. ex. skall hava samma strävan att utsända joner som zink. Vår erfarenhet talar om metaller, som så energiskt utsända joner, att de lösas upp i vatten, andra, som ej lösas i vatten, men i utspädda syror, andra åter, som icke lösas av syror. Potentialdifferensen måste vara beroende på en för metallen specifik egenskap, en strävan olika hos olika metaller att övergå i jonform och algebraiskt måste potentialdifferensen metall—lösning avtaga, då denna joniseringsströvan växer. Denna strävan måste kunna få ett siffermässigt uttryck, på vad sätt lämna vi därhän; vi beteckna denna storhet med c_0.

Varpå beror potentialdifferensen för övrigt? Att den icke beror av elektrodernas massa eller ytstorlek, är så självklart, att jag anser arbetet på att experimentellt verifiera denna sats alldeles förspillt.

Utan tvivel har också temperaturen inflytande på potentialdifferensens storlek, men då i allmänhet de galvaniska elementen, som äro byggda på existensen av dessa potentialdifferenser, arbeta vid i stort sett samma temperatur, kunna vi hålla denna konstant.

Potentialdifferensen E, som alltid räknad från metall till lösning, växer således algebraiskt med växande c och avtager med växande c_0. En funktion, som uppfyller dessa villkor är

$$E = k \log \frac{c}{c_0}$$

(k positiv för positiva joner, negativ för negativa), men några skäl för riktigheten av just detta uttryck kunna naturligtvis ej ges ännu. En av de i Nernsts formel ingående variablerna är i denna formel stillatigande för-

summad, nämligen jonens atomvärde, men man torde medgiva, att denna omständighet här saknar betydelse.

Formeln visar oss omedelbart betydelsen av konstanten c_0. E, satt $=0$, ger oss $c_0=c$, m. a. o. c_0 är den jonkoncentration, lösningen skall hava för att potentialdifferensen skall bliva noll, för att metallen ej skall visa någon spänningsskillnad gent emot elektrolyten. För denna koncentration, proportionell mot metallens elektrolytiska lösningstryck, föreslås benämningen »metallens elektrolytiska gränskoncentration». Som motivering för detta uttryck kunde man anföra, att en jonkoncentration $=c_0$ bildar gränsen mellan positiv och negativ potentialdifferens. Att denna gräns i de flesta fall är orealiserbar, spelar härvidlag ingen roll.

Ämnen, som utsända positiva joner och vid beröring med sina jonlösningar antaga negativ potential, hava stor gränskoncentration, exempelvis zink med c_0 ungefär $=10^{18}$. Ämnen åter igen, som utsända positiva joner och i beröring med sina jonlösningar antaga positiv potential, hava liten gränskoncentration, exempelvis koppar med $c_0=10^{-20}$. Endast för metaller vilkas absoluta normalpotentialer ligga nära noll, är denna gränskoncentration lätt att realisera. För ämnen, som utsända negativa joner, bliva förhållandena naturligtvis motsatta.

Det principiellt enklaste element, som på grundval av ovanstående betraktelser kan sammansättas, är koncentrationselementet med samma metall nedsatt i metallsaltlösningar av olika jonkoncentrationer. Vi taga som exempel kombinationen

$$\text{Ag} \mid \text{konc. } AgNO_3 \mid \text{utsp. } AgNO_3 \mid \text{Ag}.$$

Båda silverblecken antaga positiv potential gent emot lösningen, men enligt ovanstående är potentialdifferensen till vänster större, varför, då blecken förenas med en yttre ledning, det vänstra blir positiv pol. (Diffusionspotentialer försummas, ehuru intet hindrar, att man i förbigående omtalar dem.) Om lösningarnas jonkoncentrationer äro c_1 och c_2 och potentialdifferenserna E_1 och E_2, så erhålles

$$E_1 = k \log \frac{c_1}{c_0},$$

$$E_2 = k \log \frac{c_2}{c_0},$$

och potentialdifferensen mellan blecken, då elementet är öppet, dettas elektromotoriska kraft

$$E_1 - E_2 = k \log \frac{c_1}{c_2},$$

vilket uttryck bekräftar att för $c_1 > c_2$, E_1 är $> E_2$, d. v. s. elektroden c_1 positiv pol, och att strömmen i den yttre ledningen alltid går från den koncentrerade till den utspädda lösningen. Det kan vara skäl att visa detta även med kombinationen

$$\text{Zn} \mid \text{konc. } ZnSO_4 \mid \text{utsp. } ZnSO_4 \mid \text{Zn},$$

eftersom potentialdifferenserna här hava motsatt tecken.

Två intressanta konsekvenser av detta resultat kunna vara värda att i klassen framhålla: att koncentrationselementets elektromotoriska kraft endast beror av förhållandet mellan lösningarnas koncentrationer, ej av deras absolutvärden, och att den är oberoende av metallens natur (förutsättning dock samma atomvärden).

En experimentell verifikation av formeln för koncentrationselementet är också en bekräftelse på Nernsts formel. I besittning av en känslig galvanometer kan man lätt åstadkomma detta på följande sätt.

Vi bestämma det nyssnämnda silverkoncentrationselementets elektromotoriska kraft då den ena lösningens koncentration hålles oförändrad, den andras varieras. Fig. 1 återger elementet av den vanliga typen. Kärlen *A* innehålla silverlösningarna, kärlet *B*, vari avloppsrören doppa ned, silvernitratlösning av den högsta använda koncentrationen, försatt med kaliumnitrat för att få högre specifik vikt. Härigenom förhindras diffusion in i eller ut ur *A*, och lösningarna i dessa kunna användas flera gånger.[1]

[1] Apparaten tillverkas av R. Grave, Stockholm.

De koncentrationer, som här äro bestämmande, äro silverjonkoncentrationer, icke saltkoncentrationer. Då nu beräkningen av jonkoncentrationer för starka elektrolyter,

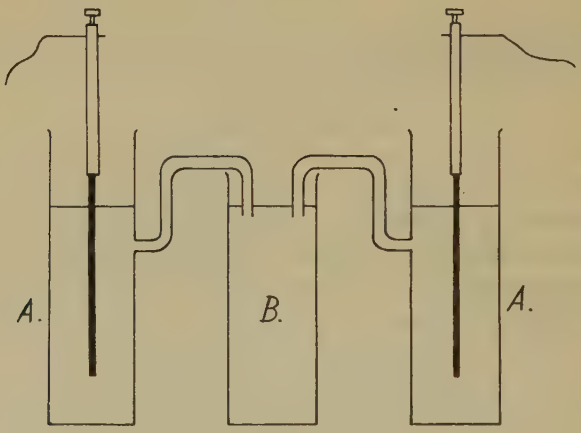


Fig. 1.

till vilka silvernitrat hör, erbjuder stora svårigheter, har jag för att få kända förhållanden mellan jonkoncentrationerna vid silvernitratlösningarnas utspädning fyllt ut koncentrationen med kaliumnitrat, så att den totala saltkoncentrationen för varje lösning har varit 1 normal. Jag har sålunda gjort följande lösningar:

1. 1 n $AgNO_3$
2. $\frac{1}{2}$n $AgNO_3$, $\frac{1}{2}$n KNO_3
3. $\frac{1}{4}$n $AgNO_3$, $\frac{3}{4}$n KNO_3
4. $\frac{1}{8}$n $AgNO_3$, $\frac{7}{8}$n KNO_3
5. $\frac{1}{16}$n $AgNO_3$, $\frac{15}{16}$n KNO_3
6. $\frac{1}{32}$n $AgNO_3$, $\frac{31}{32}$n KNO_3.

Dissociationsgraderna för dessa båda salter, beräknade enligt formeln

$$\gamma = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty},$$

äro vid 18 grader

	$AgNO_3$	KNO_3	Utspädn. i liter
$\gamma =$	0,9915	0,9890	10 000
	0,9786	0,9748	1 000
	0,9330	0,9365	100
	0,8130	0,8279	10
	0,5820	0,6372	1

De förlöpa således något så när lika, och man kan våga antaga, att i ovanstående lösningar silverjonkoncentrationen varierar på samma sätt som silvernitratkoncentrationen.

(Bekvämt göras dessa lösningar på följande sätt. Först göres 250 cm^3 1n $AgNO_3$, 125 cm^3 härav försättas med $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ mol KNO_3 [klorfritt!] och utspädas till 250 cm^3; 125 cm^3 härav försättas ånyo med $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ mol KNO_3 och utspädas o. s. v. Förvaras i mörka flaskor.)

Man övertygar sig om, att silverelektroderna äro elektromotoriskt identiska, d. v. s. att de, nedsatta i samma silverlösning icke ge någon elektromotorisk kraft. I motsatt fall har en kort behandling med utspädd salpetersyra kunnat upphäva förefintliga olikheter.

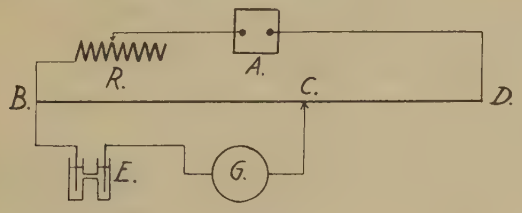


Fig. 2.

Därpå sammansättes den vanliga apparaturen för elektromotorisk kraftbestämning enligt kompensationsmetoden. Att en avbildning av anordningen, fig. 2, bifogas, beror endast på att jag önskar påpeka en liten detalj. *A* är sålunda en Nifeackumulator, *R* ett reglerbart motstånd, *BCD* en 1 m lång tråd, *E* koncentrationselementet, *G* en väggalvanometer.

Förteckningen över silverlösningarna visar, att silverjonkoncentrationen avtar i geometrisk progession, och att den elektromotoriska kraften för element, sammansatta enligt

Ag | lösning 1 | lösning 2 | Ag,
Ag | lösning 1 | lösning 3 | Ag,
o. s. v.

kommer att växa i aritmetisk progression. Längden *BC*, som är ett mått på den elektromotoriska kraften, bör ökas lika mycket för varje ny lösning, och det är för att utnyttja *BCD* så mycket som möjligt, som här motståndet *R* inkopplats. Med dess hjälp anlägger man således längs *BCD* en spänning något litet större än den största väntade, på så sätt att man vid försöket med lösningen n:r 2 ändrar *R* tills *BC* blir något mindre än 20 cm. I det här beskrivna försöket var *R* ungefär 30 Ω.

Följande tabell återger resultatet av två försök, vilkas utförande tog vartdera några minuter i anspråk.

		1		2	
		BC	Diff.	*BC*	Diff.
1n $AgNO_3$	$\frac{1}{2}$ n $AgNO_3$	15 cm	15 cm	19 cm	19 cm
»	$\frac{1}{4}$ »	29,5 »	14,5 »	37 »	18 »
»	$\frac{1}{8}$ »	46 »	16,5 »	55 »	18 »
»	$\frac{1}{16}$ »	61,5 »	15,5 »	72,5 »	17,5 »
»	$\frac{1}{32}$ »	77,5 »	16 »	90,5 »	18 »

Elektromotoriska kraften växer sålunda lineärt liksom logaritmen för förhållandet mellan koncentrationerna, och formeln är därmed bevisad. Överensstämmelsen är så god som man kan begära, då avläsningarna ej gjordes noggrannare än på $\frac{1}{2}$ cm, vilket här vore överflödigt. För övrigt kan inställningen lämpligen utföras av en lärjunge, den övriga klassen deltager genom att betrakta galvanometerskalan.

Utan svårighet inses, att koncentrationselementets elektromotoriska kraft kan sättas lika med den ena elektrod-

potentialen refererad till den andra som nollelektrod. Förtrogenhet med detta åskådningssätt är värdefull för förståelsen av den tabell över normalpotentialer, som på detta stadium lämnas. Normalpotential som beteckning för potentialdifferensen metall—lösning, 1 normal i avseende på metallens joner, är lämpligare än beteckningen elektrolytisk lösningsspänning, som lätt förväxlas med lösningstryck. Då frågan om de absoluta potentialerna ännu torde vara omtvistad, är det lämpligast att ange normalpotentialerna i förhållande till väteelektroden som nollelektrod.

Vad koncentrationselementen beträffar, hava de naturligtvis ingen praktisk användning, vilket framgår därav, att konstantens värde (för envärda joner vid 18°) är endast 0,06, varför det skulle fordras enorma koncentrationsdifferenser för att komma upp till användbara elektromotoriska krafter. Storheter däremot, som uppvisa enorma differenser, äro de olika metallernas elektrolytiska gränskoncentrationer, och det är dem vi måste begagna oss av. Tag till exempel Daniells element

$$Cu \mid CuSO_4 \mid ZnSO_4 \mid Zn,$$

där

$$E_{Cu} = k \log \frac{C_{Cu}}{C_{o,Cu}},$$

$$E_{Zn} = k \log \frac{C_{Zn}}{C_{o,Zn}},$$

så erhålles den elektromotoriska kraften

$$E_{Cu} - E_{Zn} = k \log \frac{C_{o.Zn}}{C_{o,Cu}} \cdot \frac{C_{Cu}}{C_{Zn}}.$$

Här är det första bråket i logaritmens argument av storleksordningen 10^{38} och blir bestämmande för logaritmens värde.

Tabellen över normalpotentialer visar, hur vi skola välja våra metaller, nämligen i början och slutet, ehuru praktiska och andra skäl göra, att zink och koppar, ehuru

de befinna sig ett stycke in, äro de yttersta, som kunna ifrågakomma.

En diskussion av Daniellelementet på grundval av ovanstående uttryck, nämligen med avseende på polernas tecken och lämpligaste saltkoncentrationer, är enkel och behöver här ej genomgås.

2. Polarisationen.

Om koncentrationselementet får lämna ström, minskas jonkoncentrationen kring den positiva polen och ökas kring den negativa, koncentrationsdifferenserna utjämnas, den elektromotoriska kraften sjunker; elementet polariseras. Redan formeln visar, att denna polarisation sker mycket långsamt, elementet är praktiskt taget ett s. k. konstant element. Genom att sända en ström i motsatt riktning kunna koncentrationsdifferenserna återställas, elementet tjänstgör då som ackumulator.

Även Daniells element polariseras på grund av elektrolyternas koncentrationsförändringar; av formeln för Daniellelementet på sid. 9 framgår att dessa icke kunna ha något väsentligt inflytande på den elektromotoriska kraften, även detta element är konstant.

En hastig och kraftig polarisation inträder först om genom elementets verksamhet en förändring av elektrodmaterialet äger rum. Lämpligt demonstrationsobjekt är Voltas element, sammansatt enligt fig. 3 av en liten parallellepipedisk glasburk, ett amalgamerat zinkbleck och ett kopparbleck böjt i rät vinkel. Då elementet slutes genom en voltmeter övergår kopparelektroden till en väteelektrod och en blick på normalpotentialerna visar omedelbart, att därigenom den elektromotoriska kraften måste sjunka till ett lägre värde. Depolarisatorernas verkan kan man demonstrera genom att på kopparblecket strö

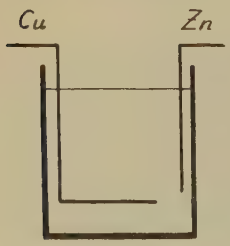


Fig. 3.

litet fast jod, kaliumbikromat eller ännu bättre brunstenspulver, då voltmetern genast springer upp till det först erhållna värdet och länge stannar där. Brunstenen illustrerar samtidigt Léclanchéelementets princip.

3. De sekundära reaktionerna.

Den gängse förklaringen av förloppet vid elektrolys av natriumsulfat mellan platinaelektroder, varvid produkterna äro väte, natriumhydroxid, syre och svavelsyra, är icke blott säkert oriktig, utan därjämte i hög grad konstlad. Förklaringen är den, att natrium- och sulfatjonerna avlämna sina laddningar och falla ut för att ånyo lösas upp i vatten, ånyo övergå i jonform således, under utveckling av väte resp. syre. Samma elektriska potentialfall, som förmår att fälla ut natrium skulle således vara otillräckligt att förhindra, att det ånyo löses upp. Eller, först faller natrium ut trots vattnet, därpå löses det upp tack vare vattnet. Man möter för övrigt även sådana förklaringar, som att natrium- och sulfatjonerna reagera med vatten, förglömmande, att en lösning av natriumsulfat ingalunda av sig själv utvecklar knallgas. Den enkla förklaringen är också den naturligaste, nämligen, att det är vattnets vätejoner som urladdas, eftersom härför en mindre spänning kräves än för natriumjonernas urladdning, trots att koncentrationsförhållandena i fråga om de förra äro så ogynnsamma. Härigenom blir lösningen anrikad på hydroxyljoner och får basisk reaktion. Vid anoden ligga förhållandena icke så klart till, teoretiskt möjlig är en urladdning av vattnets syrejoner $0''$, sannolikare kanske en utfällning av hydroxylgrupper, som reagera med varandra (ej med lösningsvattnet) enligt

$$4\,OH = 2\,H_2O + O_2,$$

eventuellt under intermediär bildning av vätesuperoxid, som katalytiskt spjälkas på vanligt sätt:

$$4\,OH = 2\,H_2O_2 = 2\,H_2O + O_2.$$

I vilket fall som helst anrikas anodvätskan i avseende på vätejoner.

Består anoden av koppar så bör det heta, ej att SO_4 förenar sig med koppar, som går i lösning, ty detta leder till den föreställningen, att det först bildas kopparsulfat på blecket, varpå sulfatet löses upp i vanlig ordning. Utan här går koppar över i jonform på grund av sin naturliga strävan, vilken den kan följa, därför att den ständigt hålles vid den erforderliga höga potentialen.

Om man nu tänker över möjligheten att i skolan genomföra detta betraktelsesätt, så stöter man onekligen på mycket stora, nästan oövervinnliga svårigheter, framför allt i 5:e klassen. Det är ju klart, att man där knappast kan inlåta sig på dessa saker. Två vägar äro möjliga, om man vill bryta med den traditionella förklaringen. Den ena, enligt förf:s mening mest tilltalande, är att från listan över de grundläggande elektrolytiska försöken stryka alla dem, vid vilka dylika komplikationer inträda. I 5:e klassen skulle då ungefär följande elektrolyser lämpligen komma till utförande:

1) Elektrolys av kopparklorid med kolanod, joner koppar och klor.

2) Saltsyra med kolanod, joner väte och klor.

3) Saltsyra med kopparanod, kopparklorid bildas vid anoden; metallen, som under vanliga förhållanden ej upplöses i syran, övergår i kopparjon, då den är positivt laddad och »förenar sig» med de klorjoner, som vandrat dit.

4) Svavelsyra med kopparanod, ur anodvätskan kan kopparsulfat utvinnas, varav vi sluta, att den negativa jonen i kopparsulfat är densamma som i svavelsyra, sulfatjonen.

5) Eventuellt blysalt, kopparnitrat, för att ge exempel på andra positiva och negativa joner.

6) Analogiledes sluta vi oss till att den positiva jonen i natriumklorid utgöres av natrium o. s. v.

Den andra vägen skulle vara att förklara förloppet vid elektrolys av natriumsulfat mellan platinaelektroder så, att

man säger, att vissa joner icke (utom under vissa exceptionella förhållanden) kunna fällas ut ur vattenlösning, och att i dessa fall vattnets beståndsdelar komma att utfällas i stället. Men hur uppkomma då basen och syran? För att undkomma denna svårighet finner jag det bäst att välja det förra alternativet och till ett senare stadium spara de s. k. sekundära processerna. Vad man går miste om är vattnets volymsammansättning, men denna spelar i 5:e klassen ingen framträdande roll. När man på gymnasiet kommer till gasreaktioner och lagarna för dem, tror jag, att man kan våga sig på en genomförd förklaring av den s. k. vattensönderdelningen.

En modifierad Victor Meyers apparat.

Av G. STARCK.

År 1878 offentliggjorde Victor Meyer beskrivningen av den efter honom benämnda apparaten för bestämning av gastätheter genom luft- (eller gas-)förträngning. Den nya metoden väckte mycket stort intresse, och apparaten, som i sin första gestalt var tämligen primitiv, förbättrades under de närmast följande åren, särskilt genom införandet av fallinrättningar av olika slag. Väsentliga modifikationer i apparaten hava vidtagits för speciella ändamål, t. ex. i fråga om Nilsons och Petterssons gastäthetsbestämningar av flyktiga metallklorider eller Nernsts av alkalikloriderna; men om den för daglig laboratoriumspraxis avsedda apparaten måste det medgivas, att den befinner sig på samma utvecklingsstadium som för 40 år sedan. Orsakerna till att V. Meyers apparat, som gjort vetenskapen så stora tjänster, mycket hastigt kom att spela en ganska underordnad roll och numera nästan råkat i glömska som praktiskt redskap betraktad, äro lätta att angiva. Redan några få år senare erhöll kemien, genom Raoults och van't Hoffs arbeten i bestämningen av lösningars fryspunkt och kokpunkt en metod av ännu mycket större användbarhet för molekylarviktsforskningen, än den V. Meyerska. I ett slag blev det nu möjligt att bestämma molekylvikter även inom den oerhört omfattande klass av föreningar, som icke kunna förgasas, men äro lösliga i något lösningsmedel. Genom arbeten särskilt av E. Beckmann har metodiken vid dessa bestämningar nått en hög grad av fulländning. Ej heller i fråga om gastäthetsbestämningar har den fysikaliskt-kemiska tekniken stått stilla, kulmen av precision hava de

uppnått i Ph. Guye's och hans skolas atomviktsbestämningar. Men denna utveckling har gått helt andra banor, V. Meyer's apparat har förblivit oberörd därav. Det ligger också i metodens natur, att den väl aldrig kan utvecklas till en precisionsmetod, men vad man kunde begära är en utveckling i riktning mot större lätthanterlighet, möjligen också mot en något större grad av exakthet. Det är ett försök att åt V. Meyer's apparat giva en mera lätthanterlig gestalt, önskvärd även i skolan, som i det följande skall framläggas.

Den traditionella apparaten är för lång, det är dess fel. Förgasningskärlet är 600 mm långt, mantelröret likaså; monterad på stativ är hela anordningen drygt 1 m hög. Redan detta är en olägenhet, en annan är svårigheten att i det långa mantelröret av glas driva upp ångan av den kokande badvätskan ända till mynningen, särskilt i fråga om högtkokande vätskor. Mantelrörets material, glas, i förening med dess betydande längd och den kraftiga upphettning, som oftast är nödvändig, gör detsamma i rätt hög grad utsatt för bristning.

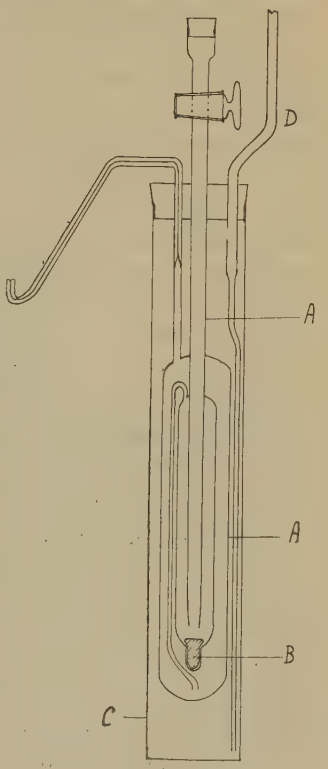


Fig. 1.

Den modifierade apparatens utseende framgår av fig. 1.[1] Förgasningskärlet *A* av glas är i sin helhet cirka 380 mm långt och består av ett 320 mm långt glasrör, 8 mm inre diameter, en inre cylinder 20 × 130

[1] Apparaten tillverkas av R. Grave, Stockholm. En något större, exaktare arbetande apparat, som icke lämpar sig för skolbruk, kommer att beskrivas på annat ställe.

mm, en yttre cylinder 35 × 180 och ett kapillärt avledningsrör. Den inre cylindern är nedtill försedd med ett kort ansatsrör, vari ligger lös en glasstav *B*, mot vilken de nedfallande vågrörens spetsar avbrytas. Det förstnämnda glasröret är försett med en kran med 8 mm vidd i kiken, kan upptill slutas med kautschukpropp och är längst ned koniskt hopdraget till cirka 4 mm och slutar 5—10 mm ovanför »stådet» *B*. Apparaten är fastsatt i en kork, som är hel och påsättes innan apparaten är fullständigt hopsmält; den vanliga anordningen med två korkhalvor skänker ingen stadga, gör apparaten bräcklig och är avgjort att förkasta. Skulle korken behöva förnyas, skär man av glasrören ungefär vid det övre *A*:et, och hopsätter dem sedermera lätt. Mantelröret *C* är ett 300 mm långt, 50 mm vitt mässingsrör med *hård*lödd botten. *D* är en kylare, som räcker ned till bottnen och straxt under korken är försedd med hål för den uppstigande ångan; avsikten med denna konstruktion är att undvika, att kondensatet stänker på förgasningskärlet. Dess placering är i verkligheten framför eller bakom papperets plan. Om badvätskan utgöres av vatten, kan kylaren undvaras och ersättas av ett enkelt glasrör som leder vattenångan åt sidan.

Överflödig, men angenäm, är en termometer med kulan några cm nedanför korken.

Till apparaten hör vidare ett graderat mätrör, för 1 millimolekyl substans ett rör på 30 cm^3, för 2 millimolekyler ett på 50 cm^3. Större substansmängder kunna icke bestämmas i denna apparat. Lämpligt är att förse de vanliga, jämförelsevis smala mätrören med en vidare, klockformig ansats, emedan gasutvecklingen stundom kan bliva så livlig, att gasen eljest går utanför röret.

Slutligen vågrören. Dessa levereras och kunna för övrigt lätt av vem som helst tillverkas i lager av den form som fig. 2 anger. Med en yttre diameter av 6 mm och en längd på den icke sammandragna delen av 20 mm rymma de cirka 0,4 cm^3. Längden kan för övrigt lämpligen varieras efter substansens molekylvikt och specifika vikt, så att de

rymma ungefär 2 millimolekyler. Fyllandet med en vätska tillgår så, att först den igensmälta spetsen avbrytes, därpå kapillärröret utdrages hårfint enligt fig. 3, röret väges, fylles med vätska genom omväxlande uppvärmning och avkylning, hårröret tillsmältes lätt enligt fig. 4 och röret ånyo väges. För fasta substanser väger man ett rör enligt fig. 5, fyller med lämplig mängd av ämnet, avsmälter vid *a* och väger de båda rörbitarna.

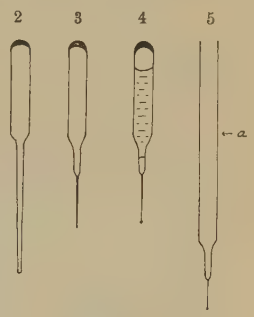


Fig. 2—5.

Försökets utförande tillgår på vanligt sätt. Vågröret nedsättes med spetsen nedåt på den stängda kranen, och kautschukproppen insättes. Härvid uppstår ett litet övertryck i rummet mellan propp och kran. Detta utjämnar man genom att vrida kranen så mycket att kommunikation erhålles till den nedre delen. När förgasningskärlet har antagit den slutliga temperaturen, öppnas kranen fullt, varvid vågröret faller ned och spetsen avbrytes mot städet. Genom utvidgning av den gasblåsa, som finnes i vågrörets övre del, utkastas vätskan hastigt och förgasas, Någon diffusion baklänges upp i fallröret behöver man ej befara; dels äger här ingen luftströmning rum, dels stänger vågröret vägen i någon mån. Diffusion i luftströmmens riktning har man givetvis att räkna med, men denna har i mina försök aldrig sträckt sig så långt som till kapillärröret utanför manteln annat än i de fall, då gasutvecklingen varit långsam genom att skillnaden mellan substansens kokpunkt och badets temperatur varit för liten. I själva verket är en stormande gasutveckling, då hela luftvolymen utjagas på 5—10 sek., att eftersträva.

I omstående tabell återgivas de med denna apparat erhållna resultaten. Substanserna äro:

Aether purissimum pro narcosi (enl. Svenska farmakopén Ed. IX) från kem. fabriken Syntes, Nol.

Aceton aus der Bisulfitverbindung från Kahlbaum.

Koldisulfid, handelsprodukt, destillerad, kpt 47—47°,5.

Ämne	Badvätska	Badtemp.	Molekylvikt obs.	Molekylvikt ber.	Diff. %
Eter	Alkohol	80°	74,22		
	»	»	74,58		
			74,40	74,08	+0,5
Aceton	»	»	56,72		
	»	»	57,12		
	»	»	56,82		
			56,92	58,05	−2,0
Koldisulfid	Vatten	100°	76,65		
	»	»	76,59		
			76,62	76,12	+0,7
Kloroform	»	»	119,1		
	»	»	118,9		
	»	»	119.9		
			119,3	119,4	−0,1
Bensol	Xylol	132°	79,18		
	»	»	79,21		
			79,19	78,06	+1,5
Brom	Vatten	100°	161,3		
	»	»	161,6		
			161,4	159,9	+1,0
Vatten	Xylol	136°	18,23		
	»	»	18,21		
	»	»	18,11		
			18,17	18,02	+0,8
	Anilin	163°	18,08	»	+0,3
Nitrobensol	Naftalin	213°	124,4	123,1	+1,0
Jod	»	»	254,7		
	»	»	256,1		
			255,4	253,8	+0,6

Kloroform ur härvarande samling, ej särskilt renad.

Benzol zur Molekulargewichtsbestimmung från Kahlbaum.

Brom (enl. Deutsches Arzneibuch V) från Kahlbaum.

Vatten, destillerat.

Nitrobensol ur härvarande samling, ej särskilt renad.

Jod, handelspreparat, sublimerad över kaliumjodid.

Avvikelserna gå i allmänhet i positiv led, och allt talar för, att metoden nog bör ge för stora molekylvikter på grund av att den förträngda luftvolymen blir för liten. Att värdet för aceton är för lågt beror otvivelaktigt på en svårundkomlig vattenhalt hos detta hygroskopiska preparat. Det icke särskilt goda värdet för bensol kan möjligen delvis tillskrivas högre homologer, svåra att avlägsna, men några särskilda skäl för denna förmodan kunna ej framläggas.

I fråga om bestämningen av vattnets molekylvikt är en viktig anmärkning att tillfoga. Emedan vattenånga är lättare än luft, måste vid detta försök apparaten ovillkorligen först fyllas med vätgas. I luftfylld apparat får man så gott som omedelbart ett kondensat av vatten i gasavledningsröret. Nu är vätgas visserligen nödvändig vid låga molekylvikter, men i och för sig utövar den, som redan V. Meyer framhållit, ett ogynnsamt inflytande på resultaten, trots den stora skillnad i spec. vikt mellan ånga och gas, som dess användning medför, beroende på att diffusionen i vätgas är mycket hastigare än i luft. Jag tror mig kunna påstå, att bestämningen av vattenångans mylekylvikt är en av de svåraste man kan företaga i apparater av V. Meyers typ, och att de goda värden, som erhållits i den här beskrivna anordningen, tala för densammas användbarhet.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Matematiska uppgifter.

97) Lös ekvationerna:

$$\sqrt{x+7} \pm \sqrt{x+5} \pm \sqrt{x+3} \pm \sqrt{x+2} = 0.$$

98) Visa att det finnes ett tal a, sådant att för alla $m < a$ uttrycket

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1$$

är < 0, vilket reelt tal x än må vara.

99) I en cirkel med radien r inpassas en korda av given längd. Genom dess ändpunkter dragas linjer parallella med två givna mot varandra vinkelräta linjer i planet. Sök orten för deras skärningspunkter, då kordan ändrar läge.

100) Sök de andragradsfunktioner $f(x)$, som äro så beskaffade, att $f(x^2-1)$ är divisibel med $f(x)$.

101) Om AA_1, BB_1 och CC_1 äro tre begränsade linjer i rymden, som skära varandra i punkten S, så förhålla sig volymerna av tetraedrarna $SABC$ och $SA_1B_1C_1$ som $SA \cdot SB \cdot SC : SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1$.

102) I en tetraeder äro motstående kanter a och a_1, b och b_1, c och c_1 mot varandra vinkelräta. Visa att

a) varje höjd i tetraedern träffar basen i skärningspunkten för dennas höjder;

b) produkterna aa_1, bb_1 och cc_1 äro omvänt proportionella mot de kortaste avstånden mellan a och a_1, b och b_1 samt c och c_1;

c) $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$.

Lösningar till uppgifterna i h. 3. 1920—21.

85) *En triangels vinklar bilda en aritmetisk progression, och summan av kuberna på deras sinus är* $\frac{3}{8}(3+\sqrt{3})$. *Beräkna vinklarna.* Genast inses att den mellersta vinkeln är 60°. Sättas då de övriga lika med $60°+\alpha$ och $60°-\alpha$, så fås efter varandra:

$$\sin^3(60°+\alpha)+\sin^3(60°-\alpha)=9/8$$

$$[\sin(60°+\alpha)+\sin(60°-\alpha)]\cdot$$
$$\cdot[\sin^2(60+\alpha)-\sin(60+\alpha)\sin(60-\alpha)+\sin^2(60°-\alpha)]=9/8$$

$$[\sin(60°+\alpha)+\sin(60°-\alpha)]\cdot$$
$$\cdot[(\sin(60°+\alpha)+\sin(60°-\alpha))^2-3\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)]=9/8$$

$$2\sin 60°\cos\alpha\cdot[4\sin^2 60°\cos^2\alpha+\tfrac{3}{2}(\cos 120°-\cos 2\alpha)]=9/8$$

$$\sqrt{3}\cos\alpha\,[3\cos^2\alpha-\tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{2}+\cos 2\alpha)]=9/8$$

$$3\sqrt{3}\cdot\cos\alpha\left[\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\frac{\cos 2\alpha}{2}\right]=9/8$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\alpha=9/8;\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{vinklarna } 30°,\ 60°,\ 90°.$$

(Löst av *Mauritz Hauge* och *O. A. L.*)

86) *Om l, m, n äro föreningslinjerna mellan spetsarna A, B, C i en triangel och den inskrivna cirkelns medelpunkt O, så är*

$$\frac{l^2}{bc}+\frac{m^2}{ca}+\frac{n^2}{ab}=1.$$

Om cirkelns tangeringspunkter med a, b, c kallas A', B', C' resp., så är $\triangle OAB'=OAC'=\frac{1}{2}l^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}l^2\sin\alpha=\frac{Tl^2}{2bc}$.

Adderas till denna ekvation de som fås genom cyklisk permutation, så fås omedelbart $T=T\left(\frac{l^2}{bc}+\frac{m^2}{ca}+\frac{n^2}{ab}\right)$, varav satsen omedelbart följer.

För en vidskriven cirkel gälla motsvarande formler med lämpliga teckenändringar. *X.*

(Även löst av *O. A. L.*)

87) *På en linje a tagas punkterna* $A_0, A_1, A_2 \ldots$ *och på linjen b punkterna* $B_0, B_1, B_2 \ldots$ *så, att, för alla* ν, *linjerna* $A_\nu B_{\nu+1}$ *äro parallella, och likaledes linjerna* $B_\nu A_{\nu+1}$. *Bevisa, att linjerna* $A_{2\nu}B_{2\nu}$ *äro sinsemellan parallella, och likaledes linjerna* $A_{2\nu+1}B_{2\nu+1}$.

Med figurens beteckningar är

$$\triangle A_0CA_1 \sim A_1DA_2 \text{ och } \triangle B_0CB_1 \sim B_1DB_2$$

sål. $\frac{q}{s}=\frac{r}{v}$ och $\frac{p}{r}=\frac{s}{t}$ således $\frac{p}{r}\cdot\frac{s}{q}=\frac{s}{t}\cdot\frac{v}{r}$ eller $\frac{p}{q}=\frac{v}{t}$,

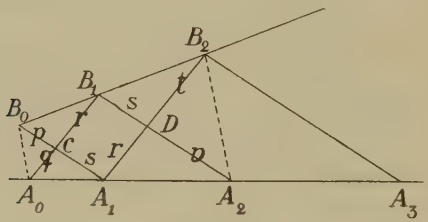


Fig. 1.

men då $\wedge A_0CB_0 = B_2DA_2$, äro således de likabenämnda trianglarna likformiga och $\wedge CB_0A_0 = DA_2B_2$. Sål. $A_2B_2 \parallel B_0A_0$. På samma sätt kunna satsens övriga delar bevisas.

Satsen följer även direkt ur Pascals sats använd på sexhörningen $A_0B_0A_1B_2A_2B_1A_0$, varav även följer att de båda linjerna *a* och *b* kunna ersättas med en godtycklig konisk sektion. *X.*

(Även löst av *O. A. L.*)

88) *Två cirklar råkas i A och B. Man drager en gemensam tangent. Uttryck rektangeln av avstånden från A och B till denna i* $AB = a$ *och den vinkel v, varunder cirklarna skära varandra.*

Cirklarnas centra O_1 och O_2, deras radier r_1, r_2 resp., $O_1O_2 = d$. En gemensam tangent tangerar i T_1, T_2 och skär radikalaxeln AB i C. AA_1 och BB_1 äro $\perp T_1T_2$. Då är

$$CA \cdot CB = \frac{\overline{T_1T_2}^2}{4}.$$

$\wedge ACT_1 = \wedge O_1O_2T_2 = \alpha$. Drages $O_1D \perp O_2T_2$ blir $O_1D = T_1T_2$.

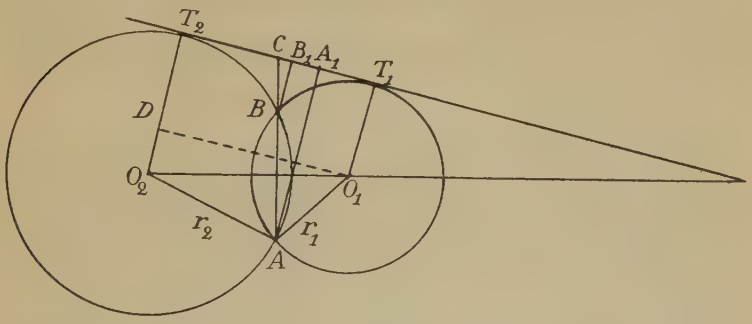


Fig. 2.

Nu är $AA_1 \cdot BB_1 = CA \cdot CB \sin^2\alpha = \frac{\overline{O_1D}^2 \sin^2\alpha}{4} = \frac{d^2 \sin^4\alpha}{4} =$

$$= \frac{d^2(1-\cos^2\alpha)^2}{4} = \frac{d^2}{4}\left[1-\left(\frac{r_2-r_1}{d}\right)^2\right]^2 = \frac{[d^2-r_1^2-r_2^2+2r_1r_2]^2}{4d^2} =$$

$$= {}^1\frac{[2r_1r_2(1-\cos v)]^2}{4d^2} = \left[\frac{r_1r_2\sin v}{2}\right]^2 \cdot 4\left(\frac{1-\cos v}{\sin v}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^2} =$$

$$= \left(\frac{ad}{4}\right)^2 \cdot \frac{4}{d^2}\left(\frac{1-\cos v}{\sin v}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{v}{2},$$

vilket är det sökta uttrycket Då cirklarna lika gärna kunna anses råka varandra under vinkeln $\pi - v$, kan man även sätta $AA_1 \cdot BB_1 = \frac{a^2}{4}\cot^2\frac{v}{2}$.

Anm. Om man sammanställer det här funna resultatet med det faktum att rektangeln av avstånden från en ellips' brännpunkter till en tangent = mindre halvaxelns kvadrat, och att ellipsens tangenter äro de enda linjer med denna egenskap, som ej gå mellan foci, har man följande (kända) sats: *Om man lägger alla möjliga par cirklar genom två*

[1] enl. cosinusteoremet ur $\triangle O_1O_2B$. Vinkeln mellan radierna O_1B och O_2B = den ena vinkeln, under vilken cirklarna råkas.

punkter A, B, som råkas under given vinkel v, tangera de gemensamma tangenterna till varje par cirklar endera av tvenne ellipser, som ha sina foci i A och B och de mindre axlarna $a \operatorname{tg} \frac{v}{2}$, $a \operatorname{cot} \frac{v}{2}$, *där* $AB = a$.[1] Ifall cirklarna äro ortogonala sammanfalla bägge ellipserna i en enda med excentriciteten $\frac{1}{\sqrt{2}}$. X.

89) *En inskrivbar fyrhörnings hörnpunkter ligga på en konisk sektion. Visa att bissektriserna till vinklarna mellan diagonalerna, och likaledes till vinklarna mellan två motstående sidors förlängningar, äro parallella med den koniska sektionens axlar.*

Lägg origo i diagonalernas (eller de två motstående sidornas) skärningspunkt, och axlarna så att den koniska sektionens ekvation blir $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ . . . . (1) (där a eller b även kunna vara imaginära), och låt diagonalernas ekvationer vara $y = kx$ och $y = k_1 x$ (såsom i ex. 5 i 1:a årg. h. 3). Insättas dessa värden i (1), fås

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 - 2x(b^2p + a^2kq) - a^2b^2 + b^2p^2 + a^2q^2 = 0.$$

Således

$$x_1 x_2 = -\frac{a^2b^2 - b^2p^2 - a^2q^2}{b^2 + a^2k^2} = \frac{l}{b^2 + a^2k^2}$$

(då l är en konstant).

Om därför kordornas delar kallas r, s och t, v, så är

$$rs = \pm\frac{l(1+k^2)}{b^2 + a^2k^2} \text{ och } tv = \pm\frac{l(1+k_1^2)}{b^2 + a^2k_1^2},$$

men då $rs = tv$ och båda produkterna äro positiva, så fås $k^2 = k_1^2$, varav satsen följer.

90) *ABCD är en inskrivbar fyrhörning. Diagonalerna AC och BD råkas i F och förlängningarna av AB och DC*

[1] Det bör tilläggas, att A och B ligga på samma sida om en dylik gemensam tangent.

i H. Bevisa att bissektriserna till vinklarna vid F och H äro parvis parallella.

Med beteckningarna i fig. 3 hava vi

$\psi = \frac{1}{2}(\gamma_2 - \alpha_1)$, således $\varphi_1 = \psi + \alpha_1 = \frac{1}{2}(\gamma_2 + \alpha_1) = \varphi$

varav satsen följer.

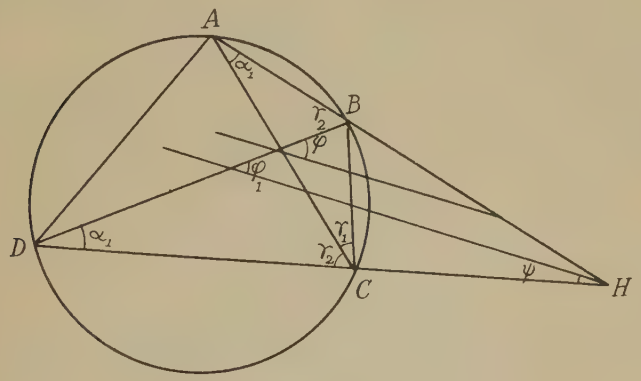


Fig. 3.

Till satserna 89 och 90 hava vi haft nöjet mottaga följande vackra gemensamma lösning:

Innehållet i dessa bägge uppgifter synes mig lämpligen kunna inordnas under den välkända satsen: *Alla kägelsnitt genom fyra punkter (A, B, C, D) på en cirkel ha samma axelriktningar.*

Tre av dessa kägelsnitt utgöras nämligen av linjeparen

AB, CD; BC, DA; AC, BD,

och axlarna till ett kägelsnitt, som består av tvenne skärande linjer, äro naturligtvis bissektriserna till vinklarna i linjernas skärningspunkt. Därav satserna 89 och 90. För ett kägelsnitt, som sönderfaller i tvenne parallella linjer, äro axelriktningarna linjernas gemensamma riktning och den däremot vinkelräta. Den allmänna satsen kan bevisas på flera sätt, t. ex. sålunda:

Man kan alltid välja ett rätv. koord.-syst. så, att cirkeln *ABCD* får ekv. $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ och linjerna *AB*, *CD* ekv.

$ux+vy+l=0$, $ux-vy+m=0$. Ekv. för ett godtyckligt kägelsnitt K genom A, B, C, D kan då skrivas

$$(K):\quad \lambda(x^2+y^2-r^2)+\mu(ux+vy+l)(ux-vy+m)=0.$$

Är nämligen $P \neq A, B, C, D$ en punkt på K', ett av dessa k.-snitt, kan $\lambda:\mu$ bestämmas så, att K går genom P. Då äro K och K' identiska, emedan de ha 5 distinkta punkter gemensamma. (K går alltid genom A, B, C, D).

Nu saknar ekv. (K) oberoende av λ och μ xy-term och följaktligen äro K:s axlar alltid parallella med koordinataxlarna. *X.*

Prisuppgift för 1921—22

för lärjungar vid allm. läroverk, tekniska skolor o. d.

Om man i ett solbelyst rum låter skuggan av ett rörligt föremål (t. ex. sitt eget huvud) närma sig tillräckligt intill skuggan av ett annat (t. ex. en fönsterpost, ett bord), uppstår en utväxt på skuggan av det ena eller andra föremålet. Redogör för lagarna för detta fenomen och förklara detsamma.

Tävlan står öppen för alla lärjungar vid allmänna läroverk, seminarier, tekniska skolor och med dessa jämställda enskilda läroverk. Tävlingsskrift, innehållande såväl egna iakttagelser som förklaringar, bör vara till redaktionen insänd före d. 1 mars 1922. Två lärjungar kunna gemensamt insända tävlingsskrift. Den tävlandes namn, läroanstalt och klass bör meddelas. Prenumeration å tidskriften fordras ej för deltagande i tävlan.

Om lämpliga tävlingsskrifter inkomma, så utdelas trenne pris som utgöras av värdefulla arbeten i matematik, fysik eller kemi. *Red.*

Ett par uppgifter ur cirkelns geometri.

Av X.

1. *En cirkel* (*O*) (*fig. 1*) *och två punkter P, Q givna. Att draga en korda genom den ena punkten* (*Q*), *som synes under rät vinkel från den andra* (*P*).

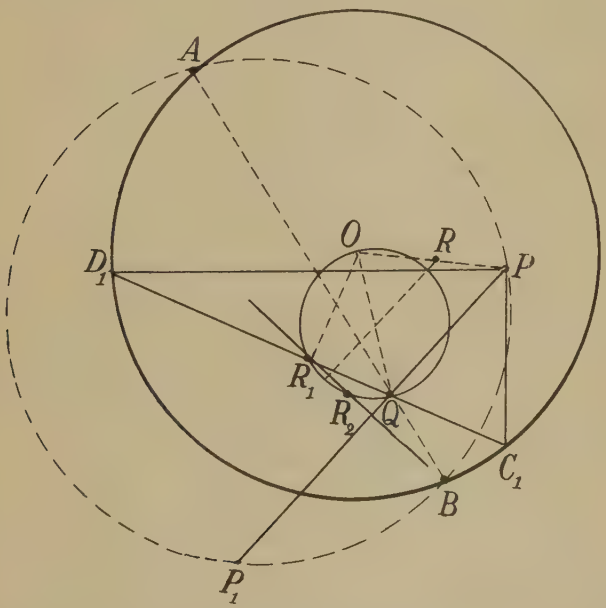


Fig. 1.

Första lösningen. Drag en godtycklig korda AQB genom Q och konstruera cirkeln APB. PQ skär denna cirkel ytterligare i P_1. Mittpunktsnormalen till PP_1 skär den på OQ som diameter uppritade cirkeln i R_1 och R_2. Då ha kordorna R_1Q och R_2Q den önskade egenskapen.

Bevis. Emedan $QP \cdot QP_1 = QA \cdot QB$, skär varje cirkel genom P och P_1 cirkeln O i två punkter som ligga i rät linje med Q; omvänt går varje cirkel genom P, som skär (O) i två punkter i rät linje med Q, även genom P_1. Om R_1Q skär (O) i C_1 och D_1, ligga alltså P, P_1, C_1, D_1 på samma cirkel, som måste ha sitt centrum, där mittpunktsnormalerna till PP_1 och C_1D_1 råkas, d. v. s. i R_1, alldenstund $OR_1 \perp C_1D_1$ och alltså $C_1R_1 = R_1D_1$. Alltså är C_1D_1 en diameter i cirkeln $PP_1C_1D_1$ och $\angle C_1PD_1 = \frac{\pi}{2}$. Samma bevis för R_2. v. s. g.

Diskussion. Mittpunktsnormalen till R_1R_2 är $\parallel PQ$ och går genom mittpunkten till OQ. Den delar alltså även OP mitt itu i R. Enligt mediansatsen använd på $\triangle OR_1P$ med medianen RR_1 är $2\overline{RR_1}^2 + \frac{\overline{OP}^2}{2} = \overline{OR_1}^2 + r^2 - \overline{OR_1}^2 = r^2$, där r är radien i cirkeln (O), ty $\overline{R_1P}^2 = R_1C_1 \cdot R_1D_1 =$ punkten R_1:s potens med avseende på (O) med ombytt tecken. Alltså är $\overline{RR_1}^2 = \frac{2r^2 - \overline{OP}^2}{4}$ oberoende av Q:s läge för givet läge av P. Fotpunkterna R_1, R_2 för normalerna genom O mot de sökta kordorna ligga alltså på en cirkel, som är konstant för varje P. Enligt en känd sats tangera nu dessa kordor alla ett kägelsnitt med centrum i R, foci i O och P samt fokalaxeln $2RR_1 = \sqrt{2r^2 - \overline{OP}^2}$. Exentriciteten är

$$\frac{OP}{2} : RR_1 = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{r}{OP}\right)^2 - 1}}.$$

Allteftersom Q ligger inom, på eller utanför detta kägelsnitt finnas 0, 1, 2 kordor resp., som uppfylla villkoret.

Kägelsnittet är imaginärt, om $OP > r\sqrt{2}$. Tangenterna till (O) genom P bilda då en vinkel $< \frac{\pi}{2}$ och ingen reell korda kan synas under rät vinkel från P. För $r\sqrt{2} > OP > r$

blir $e > 1$, d. v. s. kägelsnittet i fråga är en hyperbel, för $r > OP > 0$ blir $e < 1$ och kägelsnittet är en ellips. För $OP = 0$ (d. v. s. P i O) erhålles en cirkel; för $OP = r$ (d. v. s. P på (O)) sönderfaller kägelsnittet i punkten O som gemensampunkt för alla diametrar och punkten P. Den vinkel under vilken en korda genom en punkt på periferien synes från denna punkt själv är obestämd. För $OP = r\sqrt{2}$ finnes endast en reell korda nämligen P:s tangentkorda, som synes under rät vinkel från P.

Andra lösningen. Den nyss härledda satsen att mittpunkten R_1 till varje korda, som synes under rät vinkel från P, ligger på en cirkel med centrum i R, mittpunkten till OP, följer ur mediansatsen och den omständigheten att kordans längd är $2PR_1$, och kan tydligen läggas till grund för en annan konstruktion. Man drager en godtycklig korda, som synes under rät vinkel från P, uppritar den cirkel (R), som har sitt centrum mitt emellan O och P samt går genom denna kordas mittpunkt. Den cirkel, som har diametern OQ, skär (R) i R_1 och R_2. R_1Q, R_2Q äro de sökta kordorna. Ur mediansatsen följer nämligen, att t. ex. R_1P är hälften av tillhörande korda C_1D_1 (fig. 1), emedan R_1 är dess mittpunkt och $\overline{RR_1}^2 = \dfrac{2r^2 - \overline{OP}^2}{4}$.

2. *Genom en given punkt Q drages två vinkelräta kordor till en given cirkel. Sök orten för skärningspunkterna mellan de på dessa kordor som diametrar uppritade cirklarna.*

Första lösningen (med stöd av föregående uppgift). Den givna cirkelns centrum vare O (fig. 2) och dess radie r. Om P är en punkt på orten, finnas två vinkelräta kordor genom Q, som synas under rät vinkel från P. Enl. 1 tangera dessa ett kägelsnitt med foci i O och P (centrum i R) och fokalaxeln $\sqrt{2r^2 - \overline{OP}^2}$. I figuren är detta kägelsnitt en ellips. Nu vet man, att varje punkt, genom vilken det är möjligt att lägga tvänne vinkelräta tangenter till en ellips, är belägen på en med ellipsen koncentrisk cirkel

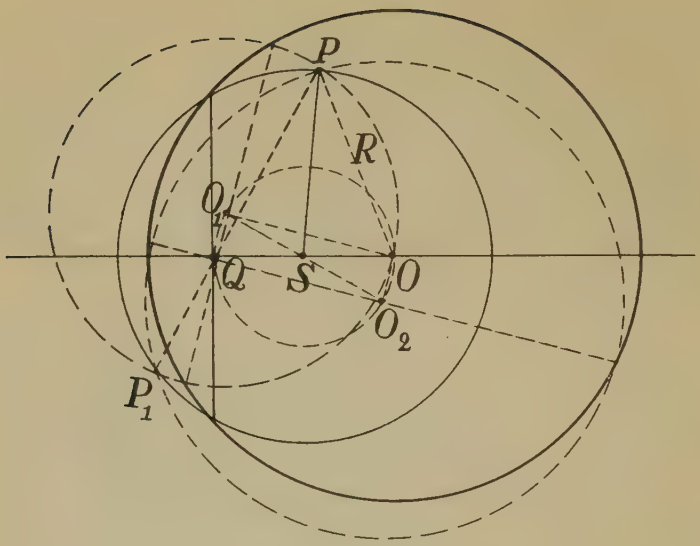


Fig. 2.

(den s. k. Monge'ska), vars radiekvadrat $= a^2 + b^2$, om ellipsens halvaxlar äro a och b. Enligt mediansatsen få vi nu

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = 2(\overline{RQ}^2 + \overline{OR}^2) = 2(a^2 + b^2 + a^2 - b^2) =$$
$$= 4a^2 = 2r^2 - \overline{OP}^2,$$

och därav $\overline{PQ}^2 + \overline{OP}^2 = 2r^2 - \overline{OQ}^2$. Om S är mittpunkten till QO har man alltjämt enligt mediansatsen:

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OP}^2 = 2\overline{PS}^2 + \frac{\overline{OQ}^2}{2}$$ och enligt föregående likhet slutligen $\overline{PS}^2 = r^2 - \frac{3\overline{OQ}^2}{4}$. *Orten för P är alltså en cirkel med centrum mitt emellan Q och O.* Normalen mot QO genom Q, skär den givna cirkeln i tvänne punkter, som tydligen tillhöra orten. Beviset gäller oförändrat i hyperbelfallet; b^2 ersättes blott med $-b^2$. Orten upphör att vara reell för $\overline{OQ}^2 > \frac{4r}{3}$.

Andra lösningen. Vi sätta avståndet $OQ = a$ och betrakta två vinkelräta kordor genom Q med tillhörande cirklar (O_1), (O_2). Dessa ha sina centra O_1, O_2 resp. i två diametralt motsatta punkter på den cirkel, som har diametern OQ (centrum S), och deras radier äro $\sqrt{r^2 - \overline{OO_1}^2}$, $\sqrt{r^2 - \overline{OO_2}^2}$ resp. Är P en av deras skärningspunkter, har man alltså

$$\overline{O_1P}^2 + \overline{O_2P}^2 = 2r^2 - \overline{OO_1}^2 - \overline{OO_2}^2 = 2r^2 - \overline{O_1O_2}^2 = 2r^2 - a^2$$

och $\overline{O_1P}^2 - \overline{O_2P}^2 = \overline{OO_2}^2 - \overline{OO_1}^2 = \overline{QO_1}^2 - \overline{QO_2}^2$, emedan OO_1QO_2 är en rektangel. Emedan $\overline{O_1P}^2 + \overline{O_2P}^2 = 2\overline{PS}^2 + \frac{a^2}{2}$, får man som nyss $2\overline{PS}^2 = 2r^2 - \frac{3a^2}{2}$ eller $\overline{PS}^2 = r^2 - \frac{3a^2}{4}$.

För den andra skärningspunkten P_1 gäller likaledes

$$\overline{O_1P_1}^2 - \overline{O_2P_1}^2 = \overline{QO_1}^2 - \overline{QO_2}^2.$$

Därav följer enligt en känd sats att cirklarnas radikalaxel PP_1 går genom Q.

Analytisk geometrisk lösning. Tidskriftens redaktion har välvilligt riktat min uppmärksamhet på följande enkla analytiska lösning.

Med beteckningarna i fig. 3 får man för första cirkeln ekv.

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varrho_1^2, \text{ varest } \begin{cases} x_1 = a \sin^2 \alpha \\ y_1 = a \sin \alpha \cos \alpha \\ \varrho_1^2 = r^2 - a^2 \sin^2 \alpha \end{cases}.$$

För den andra hava vi

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = \varrho_2^2, \text{ varest } \begin{cases} x_2 = \quad a \cos^2 \alpha \\ y_2 = -a \sin \alpha \cos \alpha \\ \varrho_2^2 = \quad r^2 - a^2 \cos^2 \alpha \end{cases}.$$

Adderas ekv. fås

$$2x^2 + 2y^2 - 2(x_1 + x_2)x - 2(y_1 + y_2)y + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \\ = \varrho_1^2 + \varrho_2^2$$

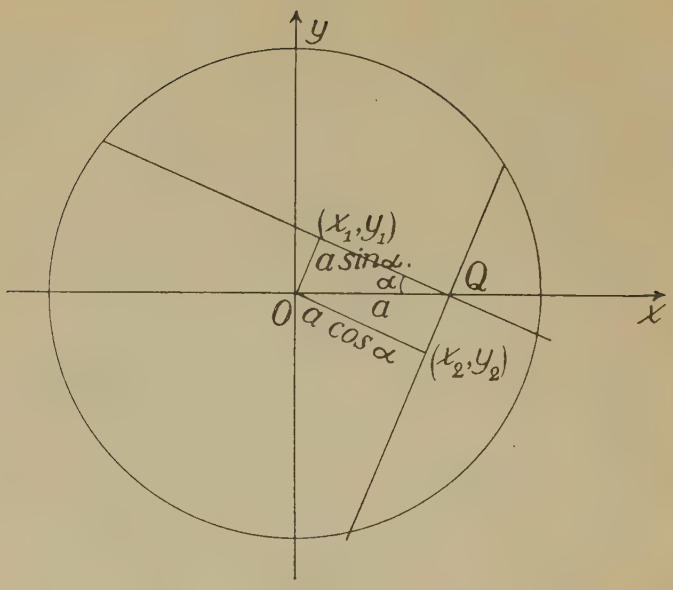


Fig. 3.

eller efter insättning

$$2x^2+2y^2-2ax-0\cdot y+a^2=2r^2-a^2$$

eller

$$x^2+y^2-ax=r^2-a^2 \text{ d. v. s. } \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=r^2-\frac{3a^2}{4}.$$

Experimentellt studium av begreppet fasdifferens på skolstadiet.

Av KURT MOLIN,
fil. lic.

Den i de svenska läroverkens lärobok i fysik givna framställningen av begreppet fasdifferens[1] är av endast kvalitativ natur och sålunda otillräcklig såsom grundval för en vidare gående behandling av viktiga optiska och elektriska problem, där fasdifferensen spelar in. Det torde därför vara önskvärt att på skolstadiet ägna frågan mera uppmärksamhet.

Inom växelströmsläran kan ju betydelsen av fasdifferensen experimentellt studeras, om nödiga anordningar stå till buds,[2] men där man är hänvisad till att med enkla hjälpmedel söka åstadkomma en åskådlig undervisning torde det här prövade rent mekaniska förfaringssättet kunna tillmätas beaktande, då detsamma under hela experimentet medger en överblick av de verksamma faktorerna. Beträffande den matematiska apparaten förtjänar framhållas, huru den analytiska geometrikursens viktiga avslutningskapitel på skolstadiet om koordinatvridningen[3] här direkt kommer till användning, och hos eleven måste detta befästa intrycket av den analytiska geometriens betydelse som tillämpad matematik.

Vid Örebro Tekniska Gymnasium har för detta ändamål följande experiment införts i tredje årsklassens labora-

[1] Tom Moll, Lärobok i fysik. Bd IV.

[2] T. ex. generator och Jouberts skiva, se exempelvis O. Gallander, Elementär Elektricitetslära, 1917, s. 95 eller O. Gallander, El. Tids. Mat. och Fys., 1917, s. 85.

[3] Se t. ex. K. R. Collin, Lärobok i plan analytisk geometri, 7 uppl. s. 114 o. f.

tionskurs, att utföras i samband med studiet av svängningsrörelse som inledning till akustiken och optiken, vid mitten av höstterminen, då den elementära matematikkursen härstädes föreligger avslutad. Experimentet har av eleverna utförts här h. t. 1920.

Till en didaktisk enhet sammanfördes den harmoniska rörelsen och pendelrörelsen,[1] och förfors i korthet på följande välbekanta sätt.

En materiell punkt P av massan m gr förutsättes röra sig med konstant hastighet v $\frac{\text{cm}}{\text{sek.}}$ i en cirkulär bana med radien a cm. Två mot varandra vinkelräta diametrar x och y äro dragna för att rörelsens moment må kunna fixeras. Punkten P har på x- och y-riktningarna projektionspunkterna P_x och P_y, som röra sig fram och tillbaka mellan resp. diametrars ändpunkter beskrivande en svängningsrörelse, som kallas harmonisk. Betecknas P:s omloppstid med τ sek., så är ju hast. $\times$ tiden $=$ vägen,

$$\therefore \quad v \cdot \tau = 2\pi a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Men den kända ekvationen kan generaliseras till följande, där med vinkelhastigheten ω menas den vinkel radien a vrider sig per sek.[2]: vinkelhast. $\times$ omloppstiden $=$ vinkelvägen uttryckt i radianer,

$$\therefore \quad \omega\tau = 2\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Tiden räknas från ett godtyckligt ögonblick, och i detta må punkten P befinna sig i B. Detta begynnelseläge angivet genom B:s vinkelavstånd φ från x-riktningen. Vinkeln φ kallas fasvinkeln och karaktäriserar begynnelsetillståndet och måste fördenskull vara en konstant storhet. Efter t sek. må P ha uppnått det av vinkeln δ karaktäriserade läget. Ur fig. 1 erhåller man då

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{t}{\tau} \quad \text{eller} \quad \delta = \frac{2\pi}{\tau} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

[1] Jämf. Friedrich Poske, Didaktik des physikalischen Unterrichts, 1915, s. 205.

[2] Denna definition torde vara lättare för eleverna att använda inom fysiken än den sedvanliga (jämf. Nat. Lindskog, Lärobok i mekanik, 1894, s. 15).

Av (2) och (3) $\delta = \omega t$ . . . . . (4).

Projektionspunkternas P_x och P_y lägen angivas genom ekv:a

$$x = a \cos(\delta + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$y = a \sin(\delta + \varphi) = a \sin(\omega t + \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Den sorts svängningsrörelse mellan två fasta ytterlägen, som dessa projektionspunkter utföra, är av utomordentlig betydelse inom fysiken.[1] Projektionspunkten P_x får tänkas ersatt av en partikel av massan m gr, som från sitt jämviktsläge O av en yttre kraft förts till punkten A. Därunder har ett arbete utförts av den yttre kraften mot den kraft K, som söker fasthålla partikeln vid jämviktsläget. Partikeln besitter i läget A en potentiell energi. Om den i ett visst ögonblick överlåtes åt sig själv, d. v. s. om den yttre kraften upphör att verka, så återvänder partikeln till O påverkad av kraften K. Är motståndet mot rörelsen litet i det medium, vari partikeln rör sig, kommer den att passera sitt jämviktsläge O. Dess rörelse kommer att beskrivas av en dämpad sinuskurva. Om dämpningen helt och hållet skulle kunna försummas, vilket ju i naturen sällan förekommer, men för enkelhetens skull här förutsättes, så kommer partikeln att uppnå A_1 samt svänga fram och tillbaka mellan A och A_1 utförande en harmonisk rörelse. Befann partikeln sig vid början av tiden t uti B_x, så bestämmes dess läge i förhållande till O vid tiden t sek. av ekv. (5). Kraften K kan beräknas med hjälp av Newtons första rörelselag: kraften = massan × accelerationen.

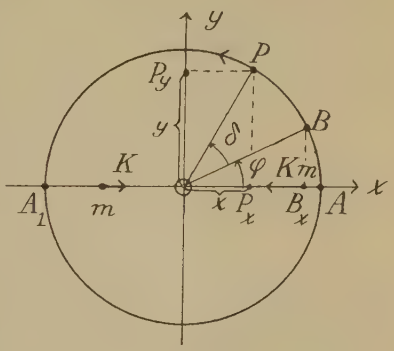


Fig. 1.

[1] Flera exempel på sådan rörelse äro upptagna hos Tom Moll, ib.

Då $$\text{acc.} = \frac{dv}{dt} \text{ och } v = \frac{dx}{dt},$$

blir $$\text{acc.} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t + q) = -\omega^2 x,$$

alltså $$K = -m \cdot \omega^2 x = cx \quad \ldots\ldots\ldots (7).$$

Kraften var, som lätt insågs, hela tiden riktad mot O, således en centralkraft, och kraftfunktionen är bestämd genom ekv. (7), som säger, att kraften är direkt proportionell mot partikelns avstånd från jämviktsläget.

En rörelse sådan som den här beskrivna frambringas lätt med hjälp av tvenne pendlar P_1 och P_2, som svänga i var sitt av tvenne mot varandra vinkelräta plan, se fig. 2.

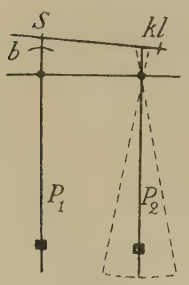


Fig. 2.

På P_1 finnes anbragt ett litet bord av järnplåt och på detta kan fästas ett glatt ritpapper. S är ett till en fin spets utdraget glasrör, som fylles med rött bläck. S är fastsatt vid en lätt träarm, styrd i sidled och fästad vid pendeln P_2. Står P_1 stilla, ritar S under P_2:s rörelse ett rakt streck på bordet b. Rörelsen dämpas förutom av luftmotståndet mot P_2 också av friktionsmotståndet mellan S och b. Men detta kan nedbringas med hjälp av motvikten (kl), som helt enkelt kan vara en vanlig tvättklämma. Står åter P_2 stilla, uppkommer vid P_1:s rörelse ett streck på bordet vinkelrätt emot det förra. På grund av det föregående inses lätt, att stiftet resp. bordet i förhållande till varandra utföra harmoniska svängningar. Den beskrivna anordningen användes ofta för framställning av Lissajous' figurer och är ytterst enkel att hopsätta.

Låter man båda pendlarna samtidigt svänga, ritar S på b slutna kurvor, som alla komma att ligga innanför den rektangel, som kan konstrueras med amplituderna $2A$ och $2B$ som sidor. Se fig 3, som föreställer bordet, sett ovanifrån. Dessa kurvor kunna antaga mycket olika former beroende på förhållandet mellan de båda pendlarnas sväng-

ningstider τ_1 och τ_2. De enklaste förhållanden inträda, om ena löpvikten förskjutes, tills τ_1 och τ_2 bliva lika, vilket inträffar, om P_1 och P_2 svänga i takt med varandra.

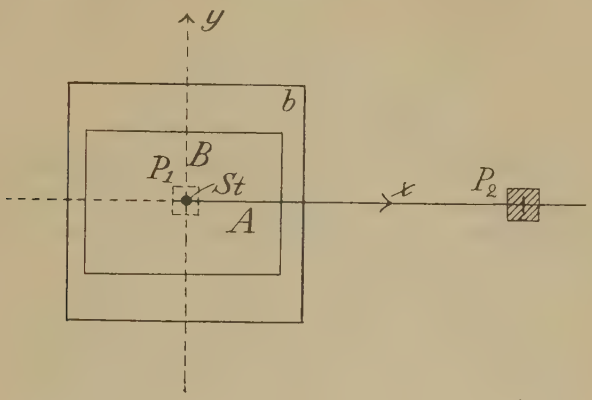


Fig. 3.

Först sättes pendeln P_1 i rörelse. Räknas tiden från det ögonblick bordet befann sig i sitt jämviktsläge, så blir ekv. för dess rörelse i förhållande till det såsom fast tänkta stiftet *St*

$$y = B \sin \omega t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Därefter sättes pendeln P_2 i gång och stiftet *St* nedsläppes mot bordet t. ex. T sek. efter början av tiden t. För stiftets egen rörelse i förhållande till sitt ursprungliga jämviktsläge blir ekv.

$$x = A \sin \omega (t - T) = A \sin (\omega t - \omega T).$$

Men enligt ekv. (2) har ωT betydelsen av en vinkel, och denna är ett mått på tidsskillnaden mellan rörelsen hos *b* och *St* i begynnelseögonblicket av deras samtidiga rörelse, alltså ingenting annat än fasvinkeln φ.

Alltså $$x = A \sin (\omega t - \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Ekv:a (8) och (9) gälla ju samtidigt oberoende av varandra. Genom att eliminera t mellan dem erhålles ju den be-

skrivna kurvans ekv.

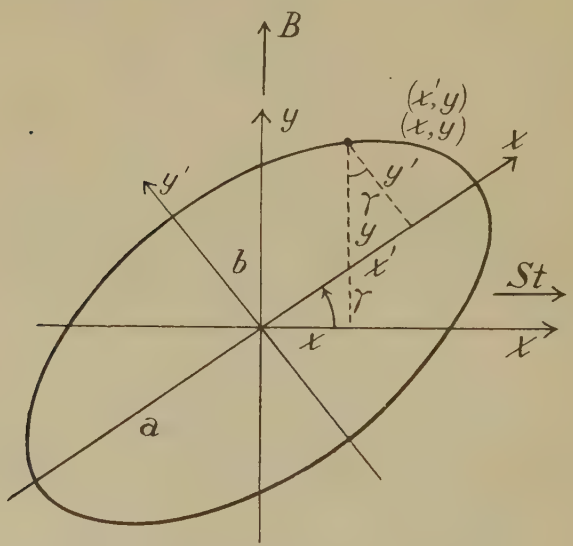
$$x = A \sin \omega t \cos \varphi - A \cos \omega t \sin \varphi =$$

$$= \frac{A}{B} y \cdot \cos \varphi - A \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}} \cdot \sin \varphi$$

eller

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{x}{A} \cdot \frac{y}{B} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Denna ekv. betyder en ellips, vars axlar bilda vinkel med koordinataxlarna. En sådan kurva har också erhållits vid experimentet, se fig. 4, och uppgiften är, att med hjälp av



$a = 36,\ b = 19,\ \gamma = 36^\circ \ \therefore\ \varphi = 57^\circ$

Fig. 4.

denna kurva bestämma fasdifferensen φ mellan bordets och stiftets harmoniska rörelser. Den erhållna ellipsens axlar a och b uppdragas, och vinkeln γ mellan det nya koordinatsystemets axlar och det ursprungligas uppmätes med gradskiva.

Ellipsens ekv. blir därför

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Sambandet mellan x', y', x, y erhålles med hjälp av projektionssatsen till

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\gamma+y\sin\gamma \\ y'&=y\cos\gamma-x\sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Insättas uttrycken på x' och y' i ekv. (11) får man

$$x^2(a^2\sin^2\gamma+b^2\cos^2\gamma)+y^2(b^2\sin^2\gamma+a^2\cos^2\gamma)- \\ -2xy(a^2-b^2)\sin\gamma\cos\gamma=a^2b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Men denna ellips är identisk med den, som återgives av formeln (10). Bringas denna till formen

$$B^2x^2+A^2y^2-2xy\,AB\cos\varphi=A^2B^2\sin^2\varphi,$$

så får man genom att jämföra koefficienterna

$$AB\cos\varphi=(a^2-b^2)\sin\gamma\cos\gamma \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$AB\sin\varphi=\pm\,ab \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

och

$$\operatorname{tg}\varphi=\pm\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sin 2\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Ur fig. 4 erhålles $a=36$ mm, $b=19$ mm, $\gamma=36°$.

Alltså $\begin{cases}\varphi_1=57° \\ \varphi_2=237°\end{cases}$ eller $\begin{cases}\varphi_3=123° \\ \varphi_4=303°.\end{cases}$

Tages hänsyn till den riktning, i vilken kurvan beskrivits, kunna dessa fasvinklar diskuteras,[1] i annat fall kan man nöja sig med att ange φ_1 som resultat.

Örebro, Tekniska Gymnasiet, april 1921.

[1] φ_1 och φ_4 motsvara likbelägna ellipser, beskrivna i olika rörelseriktningar. Sammalunda är förhållandet med φ_3 och φ_2. Jämf. O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. Bd I, s. 149. 1902.

Är solens strålning variabel?

Med anledning av professor Granqvists uppsats med samma titel i Fysikersamfundets årsbok Kosmos

av **ANDERS ÅNGSTRÖM.**

På senaste tid har ett intensivt arbete bedrivits, särskilt från amerikanska forskares sida, för att utföra mätningar och ur dem beräkna den s. k. solarkonstanten. Denna definieras som den strålning, som faller vinkelrätt mot en yta av en kvadratcentimeters utsträckning vid atmosfärens yttersta gräns och anges vanligen i gr. cal. per min. Att känna denna strålning, som alltså är oberoende av atmosfärens beskaffenhet, är naturligen av stort intresse, då det är genom solens strålning som huvudparten av all energi tillföres vår jord. Genom Langley's samt Abbots och hans medhjälpares arbeten har man kunnat fixera solarkonstanten till omkring 2 gr. cal., ett värde, som dock enligt Abbots uppfattning är underkastat fluktuationer av upp till 10 %, beroende på variationer hos solen själv.

I den ovan anförda uppsatsen har nu professor Granqvist i Uppsala vänt sig mot d:r Abbots uppfattning om solens variabilitet i det han, utgående från Abbots och ett av honom själv i Uppsala insamlat observationsmaterial, anser sig kunna påvisa, att de beräknade värdena på solarkonstanten stå i samband med atmosfärens genomskinlighet. Då solens strålning vid atmosfärens gräns icke gärna kan bero av atmosfärens egen beskaffenhet, sluter hr Granqvist att en felkälla måste behäfta den använda metoden och att man följaktligen ej har rätt att sluta att solarkonstantens beräknade variationer äro reella. Han

antyder vidare den slutsatsen, att den av Bouguer uppställda lagen för ljusets absorption, på vilken lag beräkningarna äro grundade, ej skulle ha giltighet för jordatmosfären.

Undertecknads uppfattning om de slutsatser, som böra dras av observationsmaterialet, skiljer sig väsentligt från hr Granqvists. Innan jag i korthet redogör för min uppfattning om denna viktiga och intressanta frågas läge, en uppfattning grundad på deltagande i Abbots expedition till Algier 1912, på arbeten i det av K. Ångström upprättade solarobservatoriet i Uppsala, samt på solarkonstantbestämningar under en av mig ledd expedition till Mount Whitney i Kalifornien 1913, måste jag emellertid i korthet redogöra för den metod, som såväl Abbot som hr Granqvist använt för att bestämma solarkonstanten. Härvid får jag dock i huvudsak hänvisa till hr Granqvists egen överskådliga framställning, på vissa punkter kompletterad av den kritiska översikt, som jag nyligen givit i Geografiska Annaler.[1]

Svårigheten när det gäller att ange ett exakt värde på solarkonstanten ligger däri, att problemets natur är sådan, att vi knappast kunna tänka oss, att vi kunna mäta solarkonstanten själv. Vi kunna icke försätta oss till atmosfärens yttersta gräns. Vi kunna visserligen med moderna *ballons sondes* sända upp instrument till en höjd av över 30 km, där den återstående delen av atmosfären blott belöper sig till en bråkdel av en procent av den atmosfär, som vi själva ha över våra huvuden. Men även om vi kunna föreställa oss, att dessa ballonger kunde utrustas med tillförlitliga instrument för att bestämma solstrålningen, återstår alltid den frågan: vad veta vi om dessa högsta luftlagers absorptionsförmåga; kanske är blott några meter av denna ytterligt tunna atmosfär dock tillräcklig för att fullständigt utsläcka vissa delar av den strålning som solen utsänder.

En beräkning av solarkonstanten grundar sig därför utom på en mätning av solstrålningen på punkter inom

[1] Geografiska Annaler 1920 H 2/3.

atmosfären, även med nödvändighet på ett antagande om enligt vilken lag solstrålningen absorberas i atmosfären. Vi skola strax ange vilket detta antagande är och vilka förutsättningar vi måste införa angående atmosfärens beskaffenhet för att vi skola ha rätt att göra nämnda antagande. Först dock ett exempel ägnat att tydliggöra de omständigheter, som man här måste taga i betraktande.

Antag att det gäller att mäta strålningen I_0 från själva koltråden i en glödlampa, sådan den skulle vara om glasväggen vore borta, men för övrigt under de förhållanden vari den befinner sig i fråga om luftförtunning o. s. v. Vi tänka oss det fall uteslutet att vi kunna införa mätinstrument i själva glödlampan. Den strålning, som utträder ur glaset, kunna vi emellertid mäta. Antag att den är I_1. Den bråkdel av I_0, som absorberas i glasväggen, antaga vi vara α; då är:

$$I_1 = I_0 - \alpha I_0 = I_0(1-\alpha) = I_0 \cdot \beta; \text{ där } \beta = (1-\alpha)$$

β brukar kallas genomskinligheten eller transmissionen.

Antag nu att koltrådens strålning icke förändras på annat sätt vid sin gång genom glaset än att den försvagas från värdet I_0 till värdet I_1. Om jag omger glödlampan med ännu en glasvägg fullkomligt lika med den förra, så bör strålningen I_1 försvagas med samma bråkdel α, varmed I_0 förut försvagades, och jag bör få för den strålning, som passerat båda glasväggarna:

$$I_2 = I_1(1-\alpha) = I_0(1-\alpha)^2 = I_0 \cdot \beta^2$$

Om jag omgivit koltråden med trenne glasväggar erhållas på liknande sätt:

$$I_3 = I_0\beta^3 \text{ o. s. v.}$$

För n stycken lika glasväggar ha vi generellt:

$$(1) \qquad I_n = I_0\beta^n.$$

Logaritmera vi detta uttryck, erhålles:

$$(2) \qquad \log I_n = \log I_0 + n \log \beta.$$

Avsätta vi alltså n, d. v. s. antalet glasväggar utefter x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem, logaritmen för

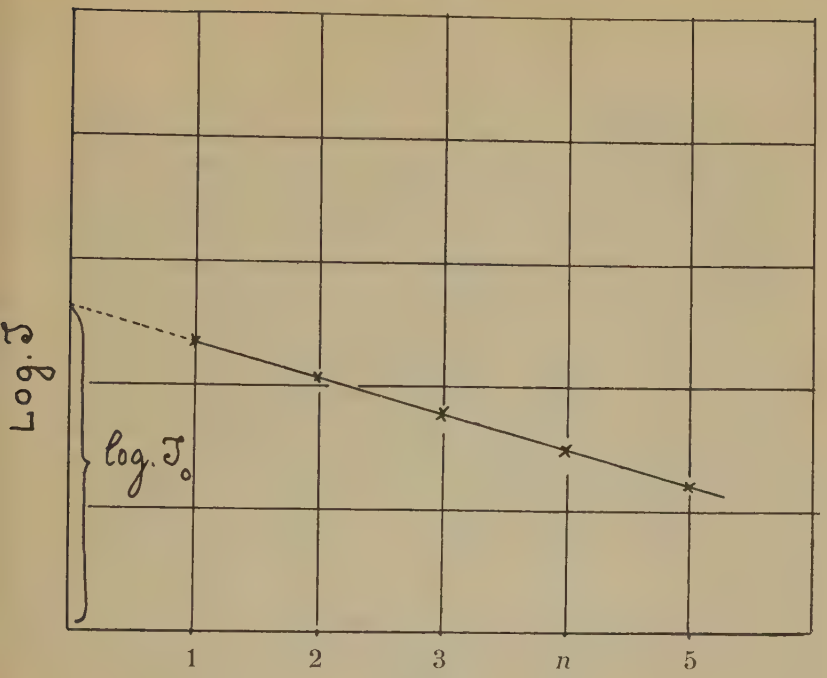


Fig. 1.

det tal, som uttrycker den motsvarande strålningen utefter y-axeln, så erhålla vi en rät linje, vars vinkelkoefficient är $\log \beta$ och som utdragen skär y-axeln i en punkt, $y = \log I_0$, som alltså svarar mot $n = 0$, d. v. s. ger logaritmen för strålningen, om intet glasskikt existerade. Man kunde tänka sig att vi alltså härmed hade angivit en metod att bestämma det sökta värdet I_0. Enligt en fullkomligt liknande metod har man också verkligen trott sig kunna bestämma solstrålningen utanför atmosfärens gräns, varvid vårt glasskikt är ersatt av den luftmassa, som solstrålningen har att genomlöpa, då solen står i zenit, och ökningen av skiktens antal åstadkommes då solhöjden minskas och strålningen genomlöper en större och större luftmassa. Vårt n, om vi tänka oss atmosfären som ett planparallellt lager (och detta är i allmänhet tillåtet), är därvid givet

genom likheten

$$n = \frac{1}{\sin z}$$

där z är solhöjden.

Det är lätt att inse, att om strålningen blott försvagas, men i övrigt icke ändrar sin natur, de ovannämnda likheterna (1) och (2) böra gälla för en planparallell atmosfär, vars täthet må förändras hur som helst med höjden, under förutsättning blott att tätheten och sammansättningen är konstant i varje horisontellt plan.

Medelst denna metod bestämde t. ex. den franske fysikern Pouillet solarkonstanten och fann ett värde av 1,76.

Om jag utför experimentet med glödlampan skall jag emellertid finna, att jag på detta sätt blott erhåller ett ungefärligt värde på koltrådens strålning, som är behäftat med ganska stora fel. Koltråden själv utsänder nämligen en

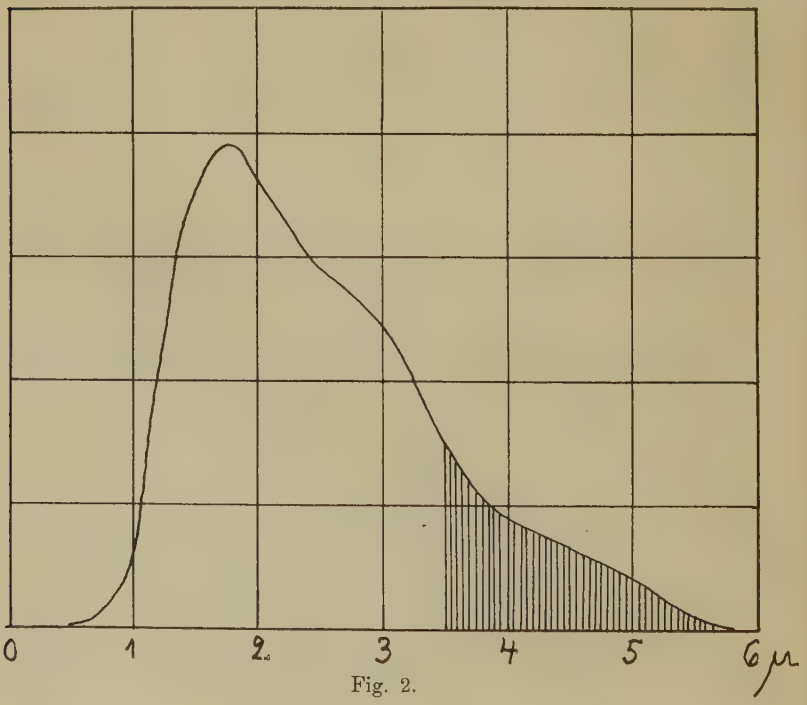


Fig. 2.

hel serie av våglängder över vilka energien fördelar sig ungefär på det sätt, som fig. 2 framställer. Av dessa vågors energi absorberas de streckade delarna nästan fullständigt även av ett ganska tunt glasskikt. De, som sedan utträda, absorberas nästan inte alls av glaset. Jag erhåller därför, om jag ökar väggarnas antal, ett skenbart mycket litet värde på α, d. v. s. ett stort värde på β, och ett för lågt värde på I_0, om jag extrapolerar efter den räta linje, som uttryckes genom ekvationen (2).

Ett alldeles liknande förhållande visar sig vara fallet, då det gäller, att bestämma solarkonstanten. Strålningen förändras ej blott på så sätt att den försvagas, utan samtidigt ändrar sig dess sammansättning så att somliga våglängders energi försvagas mer, andras mindre.

Den enkla lagen (1) och (2), som först tillämpades på solstrålningens gång genom atmosfären av Bouguer, och som vi därför vilja kalla för den Bouguerska lagen, gäller därför icke i sin ursprungliga enkla form för solstrålningen. Men tänka vi oss solstrålningen uppdelad i mycket små elementargebit, där varje gebit karaktäriseras av att våglängden är mycket nära densamma, så kunna vi vänta att den enkla Bouguerska formeln skall gälla för vart och ett av dessa elementargebit. Låt solstrålningen utom atmosfären för ett visst elementargebit vara $I_{\lambda 0}$ strålningen efter det att en luftmassa $= n$ genomlupits vara $I_{\lambda n}$, då är, om β, d. v. s. transmissionen, har värdet β_λ

$$I_{\lambda n} = I_{0\lambda} \cdot \beta_\lambda^n$$

och vi kunna bestämma $I_{0\lambda}$ på det sätt, som ovan angivits. Solarkonstanten själv är summan av strålningen vid atmosfärens gräns för alla elementargebiten:

$$(3) \quad I_0 = I_{\lambda 0} + I_{\lambda' 0} + I_{\lambda'' 0} \ldots = \frac{I_{\lambda n}}{\beta_\lambda^n} + \frac{I_{\lambda' n}}{\beta_{\lambda'}^n} + \text{ o. s. v.}$$

I spektroskopet ha vi nu ett medel att uppdela solstrålningen i dess elementargebit, i bolometern eller termoelementet ett medel att bestämma energien inom varje elementargebit. Utföres en dylik energibestämning i ett

stort antal punkter i spektrum vid olika solhöjd, så kan man tänka sig att man genom tillämpning av (3) skall kunna beräkna solarkonstanten. I huvudsak enligt denna metod har först Langley och sedan under flera år Abbot och hans medhjälpare, samt slutligen hr Granqvist i fråga om ett till största delen opublicerat material, sökt bestämma solarkonstanten. Vid de försiktighetsmått och praktiska detaljer i mätning och beräkning, som härvid måste iakttagas, skall jag här icke uppehålla mig. I fråga om dessa kan jag nöja mig att hänvisa till hr Granqvists ovan citerade uppsats. Vad jag här vill framställa till diskussion är detta: förutsatt att vi röra oss med en strålning, som praktiskt taget har samma våglängd och som alltså praktiskt taget till alla delar absorberas lika mycket i ett visst skikt — en dylik strålning kalla vi en *homogen* strålning — vilka villkor måste då vara uppfyllda för att jag från en serie av mätningar av I_1, I_2. I_3, o. s. v. vid olika luftskikt skall kunna bestämma I_0 på det sätt, som åskådliggjorts i fig. 1. Det är att märka, att man i fråga om bestämningar av den s. k. solarkonstanten aldrig kan utföra *samtidiga* mätningar av I_1, I_2, I_3 o. s. v. på samma plats, utan att av naturliga skäl en viss tid alltid förflyter mellan de olika solhöjderna. De villkor, som i första rummet antagits gälla, äro:

1) Att enhetsskiktets absorption α, och alltså även genomskinlighet β, är densamma under alla observationerna.

2) Att strålningen I_0 själv är densamma under hela observationsserien.

Den första punkten uttrycker, att atmosfären icke får förändras under observationsseriens gång, så att den t. ex. klarnar mer och mer, eller att disbildning eller rök ändrar dess sammansättning. Denna punkt har varit mycket uppmärksammad av amerikanarna. Abbot har, särskilt därtill föranledd av prof. Very's kritik, givit sig stor möda att uppsöka observationsorter, där luften varit särskilt ren och variationerna i luftens genomskinlighet från dag till

dag små. Detta är i hög grad fallet vid Mount Wilson i Kalifornien och vid Calama i Chile. I allmänhet anser man det som ett kriterium på att luftens genomskinlighet varit konstant, om den punktserie, som man erhåller om skiktjockleken avsättes efter ena axeln och logaritmen för motsvarande strålning efter den andra — alltså som i fig. 1 — kan sammanbindas medelst en rät linje. Om atmosfärens genomskinlighet emellertid varierat så småningom och i samma riktning från början till slutet av observationsserien, blir detta kriterium lätt synnerligen missledande. Särskilt inträffar detta naturligtvis på orter, där transmissionen är underkastad stora förändringar. Härtill skall jag senare återkomma.

Vad åter punkt (2) beträffar är det egendomligt att finna huru föga detta villkor uppmärksammats även i fall, där det bort föranleda en viss försiktighet. Samtidigt, som man alltså söker bestämma solarkonstanten och tror sig finna, att den är variabel, utgår man vid hela beräkningen från den förutsättningen, att den är konstant, utan att, så vitt jag kunnat finna, spörja sig hur denna förutsättning inverkar på de skenbara fluktuationernas storlek. Det är visserligen sant, att på det hela taget denna felkälla bör inverka mycket litet på solarkonstantens absoluta värde, men när det gäller, som i hr Granqvists fall, att avgöra huru mycket små ändringar i det beräknade värdet på luftens genomskinlighet sammanhänger med det beräknade värdet på solarkonstanten, är det nödvändigt att efterse, huruvida icke det funna sambandet möjligen är givet a priori genom att vissa approximativa antaganden införts i beräkningsmetodens tillämpning. I det följande skall jag visa att detta sannolikt är fallet beträffande de solarkonstantvärden av Abbot, på vilka hr Granqvist stöder sina slutsatser, och att det samband, som han här funnit mellan atmosfärens transmission och värdet på solarkonstanten, sannolikt är ett skenbart samband, vars framträdande beror på att i de fall, då solarkonstanten beräknats vara högre än sitt medelvärde, den i flertalet fall även varit i stigande

och vice versa. Samtidigt som solarkonstanten varit i stigande (och i genomsnitt hög) erhåller jag emellertid, om jag liksom Abbot (och på samma sätt hr Granqvist) utgår från att den under observationsserien är konstant, ett för högt värde på luftens absorption (för lågt på dess genomskinlighet; för det fall, att solarkonstanten varit fallande (och i genomsnitt låg) blir det beräknade värdet på absorptionen för lågt. Detta är ju, allmänt uttryckt, resultatet av hr Granqvists granskning. Vi vilja nu se om den ovan antydda förklaringen även är kvantitativt tillfredsställande.

Vi vilja fördenskull dröja något vid diagrammet i fig. 3, i vilken liksom förut i fig. 1 luftmassan är avsatt som abscissa, med den luftmassa, som strålningen från solen i zenit genomlöper, räknad som en enhet. Som ordinata har avsatts logaritmen för det värde på strålningen som erhållits vid respektive luftmassor. Låt oss anta, att den *verkliga solarkonstanten*, vilken vi enligt denna metod tydligen ej kunnat exakt mäta, vid observationernas början har värdet I_0

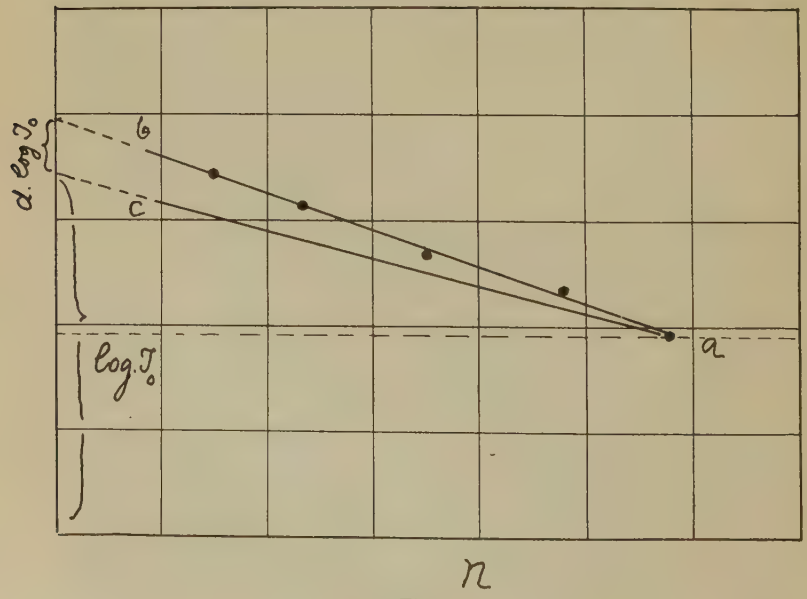


Fig. 3.

vid luftmassan n, men under observationsseriens gång växer, så att det till $x=0$ extrapolerade värdet på strålningslogaritmen är $\log I_0'$ i stället för $\log I_0$. Den räta linje, varmed vi anta, att observationspunkterna kunna förbindas, är då betecknad med *ab*, under det att, om solstrålningen varit konstant, den skulle ha haft den lutning, som linjen *ac* angiver. Följden härav är, att, då transmissionen beräknas från lutningen hos linjen *ab* (enl. ekv. 2), vi erhålla ett för lågt värde på transmissionen. För den händelse variationen i solarkonstanten under observationstiden är liten i förhållande till solarkonstanten själv, kunna vi genom ett enkelt uttryck angiva den ändring i den skenbara transmissionen, som svarar mot en viss ändring i solarkonstanten. Antag att linjen *ac*:s vinkelkoefficient är φ, linjen *ab*:s vinkelkoefficient φ_1. Med stöd av ekvationen (2) erhålles:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \log\beta = -\frac{\log I_0 - \log I}{n} \\ \operatorname{tg}\varphi_1 &= \log\beta_1 = -\frac{\log I_0^1 - \log I}{n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

där β är den verkliga, β_1 den skenbara transmissionen och n är den luftmassa, som strålningen genomlöper vid observationsseriens början. Av (3) erhålles:

$$\log\beta - \log\beta_1 = -\frac{\log I_0 - \log I_0'}{n}$$

eller

$$d\log\beta = -\frac{d\log I_0}{n}$$

som ger

$$\frac{d\beta}{\beta} = -\frac{dI_0}{I_0 \cdot n}.$$

En kontinuerlig ökning i solarkonstanten av bråkdelen $\frac{dI_0}{I_0}$ ger tydligen en minskning i den skenbara transmissionen med bråkdelen $\frac{dI_0}{I_0 \cdot n}$. Vilka hållpunkter kan man nu få

för att bedöma solarkonstantens sannolika variation under olika förhållanden? Vi vilja för att besvara denna fråga först hålla oss till det antagandet, att de av Abbot beräknade solarkonstanterna i huvudsak äro riktiga, även om naturligtvis skilda felkällor kunnat spela in i de individuella värdena. Man finner, som ovan antytts, variationer av upp till 10 %; två på varandra följande observationsdagar ge sällan en skillnad på solarkonstanten på mer än 5 %. Angående dessa variationers art och beskaffenhet känner man ännu mycket litet. I allmänhet synas de vara relativt långsamma med en period på 7 à 10 dagar, men ofta förekomma även starka stegringar och fall inom loppet av några dygn. Det är på intet vis uteslutet, att stundom starka ändringar kunna försiggå inom loppet av några få timmar, ehuru de ovan diskuterade observationsmetoderna utesluta deras upptäckande. Att observationernas på strålningen logaritmer i allmänhet kunna angivas medelst en rät linje enligt fig. 1, tyder emellertid på att de hastiga variationerna äro ganska sällsynta och vi kunna därför utgå ifrån att ändringarna ske ganska kontinuerligt från dag till dag. Det är nu att märka, att varje värde på solarkonstanten, som vi beräkna ur mätningarna, svarar mot det värde, som solarkonstanten *har strax efter slutet* av observationsserien (vi göra ju en extrapolation till luftmassan 0). Om vi därför sammanställa de beräknade värdena på solarkonstanten med dem, som erhållas föregående dag, kunna vi erhålla åtminstone ett ungefärligt begrepp om den ändring som är sannolik under själva observationstiden. Resultatet av en dylik sammanställning är framställd i tab. 1.

Solarkonstantens medelvärde är betecknat med *Im*, med δ det belopp som skall läggas till detta värde för att vi skola erhålla solarkonstanten föregående dag. För de höga solarkonstanterna är δ negativ, för de låga positiv. Ungefär för solarkonstantens medelvärde är $\delta = 0$. Det framgår härav, att under de observationsserier, som givit de höga solarkonstantvärdena, solarkonstanten vanligen varit stigande

Tab. 1.

I amplit.	*Im*	δ
> 2	2,03	— 0,107
1,95—2,00	1,97	— 0,036
1,90—1,95	1,93	+ 0,003
1,85—1,90	1,88	+ 0,043
1,85	1,85	+ 0,060

och vice versa. Vi kunna med stöd av denna sammanställning även lätt få en ungefärlig uppfattning om *huru stor* ändringen sannolikt varit under själva observationstiden. Observationerna vid Mount Wilson ha i allmänhet börjat vid sextiden på morgonen, då luftmassan haft ett värde av omkring 3,0, och fortgått till framåt middagstiden, då luftmassan närmat sig ett värde av omkring 1,0. Den sannolika ändringen av solarkonstanten under dessa sex timmar är i nedanstående tabell given under rubriken ΔI_0, den motsvarande skenbara procentiska ändringen i luftens genomskinlighet (beräknad mellan luftmassan 3 och 1) är uppförd under rubriken $\frac{\Delta\beta}{\beta}$, varvid $\frac{\Delta\beta}{\beta}$ är beräknad i enlighet med ekvationen 4.

Tab. 2.

I_0	ΔI_0	$\frac{\Delta I_0}{I_0}$	$\frac{\Delta\beta}{\beta}$
1,825	— 0,022	— 1,2 %	+ 0,6 %
1,875	— 0,011	— 0,6	+ 0,3
1,920	— 0,000	$\pm$ 0,0	$\pm$ 0,0
1,940	+ 0,004	0,2	— 0,1
1,975	+ 0,012	0,6	— 0,3
2,000	+ 0,018	0,9	— 0,5
2,03	+ 0,025	1,2	— 0,6

Uttrycket $-\frac{\Delta\beta}{\beta}$ ger alltså den lilla korrektion, som bör bibringas till de erhållna värdena på genomskinlighet. Så obetydlig den är, är den dock ägnad att i ej oväsentlig

grad förminska och, enligt min mening, praktiskt taget utplåna det samband, som hr Granqvist trott sig finna mellan solarkonstantens värde och luftens genomskinlighet i fråga om de Abbotska mätningarna. I efterföljande tabell äro givna såväl de av hr Granqvist anförda värdena å genomskinligheten, som ock de korrigerade, varvid jag inskränkt mig till att anföra de värden, som hänföra sig till våglängderna 0,35. 0,60 och 1,00μ:

Tab. 3.

Mount Wilson 1911.

Antal	I_0	0,35		0,60		1,00	
		β	β (korr.)	β	β (korr.)	β	β (korr.)
2	1,80—1,85	0,633	0,629	0,922	**0,917**	0,979	0,973
20	1,85—1,90	0,631	0,629	0,906	0,903	0,987	**0,984**
35	1,90—1,925	0,639	**0639**	0,903	0,903	0,980	0,980
35	1,925—1,950	0,625	0,625	0,899	0,899	0,978	0,978
17	1,950—2,00	0,604	0,606	0,888	0,891	0,970	0,973
4	>2	0,575	0,579	0,867	0,872	0.956	0,962

Huru oerhört svagt utvecklat detta samband är även mellan de okorrigerade värdena på genomskinligheten och solarkonstanten själv, framgår bäst av fig. 4, där jag avsatt värdena på genomskinligheten efter y-axeln, värdena efter solarkonstanten efter x-axeln. Jämför man denna figur med hr Granqvists fig. 3,[1] vilken han anser icke visa något samband mellan de solarkonstantvärden, som samtidigt erhållits i Algier och Kalifornien, så blir denna jämförelse icke till förmån för det av hr Granqvist urgerade sambandet.

Ännu betänkligare synes mig emellertid vara att hr Granqvist vid sitt försök att påvisa detta samband, vid vilket han lägger så stor vikt, blott ansett sig behöva anlita ett enstaka års resultat från de Abbotska mätningarna. Gå vi till solarkonstantbestämningarna 1910, ett år, som är synnerligen väl representerat av ett 120-tal värden, så finna vi följande fördelning av genomskinligheten på de olika solarkonstantgrupperna:

[1] Se G:s uppsats pag. 76.

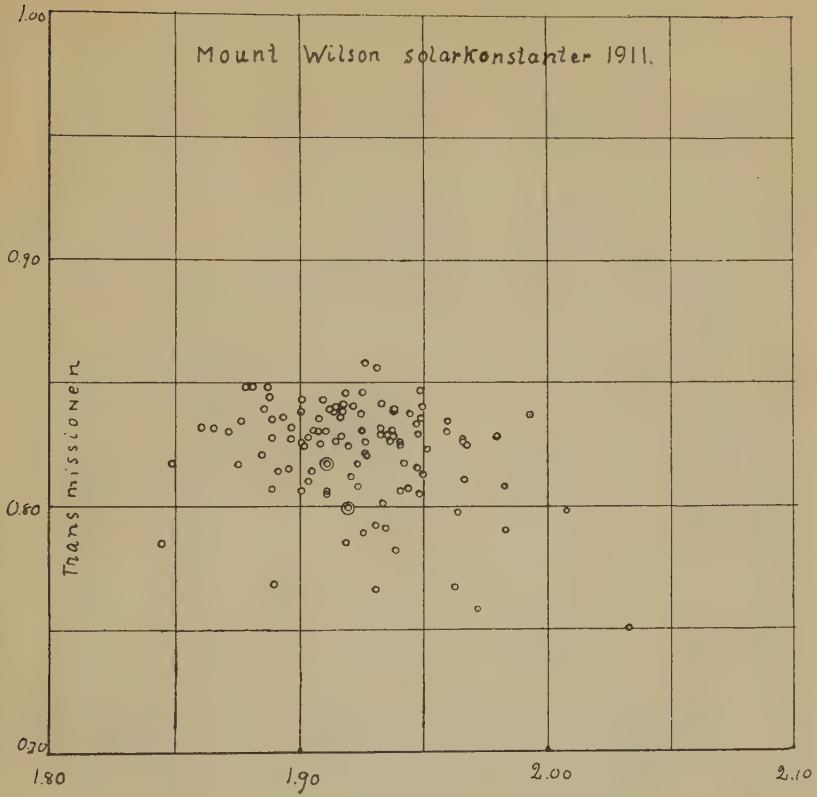


Fig. 4.

Tab. 4.

Antal	I_0	β	β (korr.)
3	1,80 —1,85	0,808	0,803
21	1,85 —1,90	**0,822**	0,820
42	1,90 —1,925	**0,822**	**0,822**
28	1.925—1,950	0,813	0,816
17	1,95 —2,00	0,797	0,802

Redan av de okorrigerade värdena synes det här tydligt, att intet som helst samband i detta fall kan anses föreligga.

Gå vi nu över till de observationer, som hr Granqvist erhållit i Uppsala, så är jag här fullt enig med hr Granqvist, att ett tydligt samband mellan de *skenbara* solarkonstanterna och den *skenbara* genomskinligheten hos luften är för handen. Frågan är nu, varpå detta skenbara samband kan bero. För mig är det tydligt, att det beror på följande omständighet.

Under våra klimatiska förhållanden är luftens genomskinlighet underkastad ständiga, mycket betydande växlingar. Dessa försiggå stundom ganska hastigt, men mycket ofta långsamt och så småningom, så att luften ena dagen är ganska ren, den andra åter fylld av en mängd diffunderande partiklar, som göra, att luften synes disig. Ibland finna vi, att det långsamt klarnar upp framåt middagen, ibland äger ett motsatt förhållande rum, i vilket senare fall ofta den vid markytan uppvärmda luften stiger uppåt vid middagstiden och för upp damm och stoft i atmosfären. Blott för den händelse att övergångarna ske plötsligt märka vi denna förändring på våra observationer över strålningen. Sker förändringen långsamt och kontinuerligt, i samma riktning under hela observationstiden, så får kurvan, som anger sambandet mellan strålning och solhöjd, ett fullkomligt ordinärt förlopp. Logaritmen för strålningen, avsatt som funktion av luftmassan (se fig. 1), blir given genom en linje, vars avvikelse från den räta linjen ej alls behöver framträda. Jag får emellertid en för hög solarkonstant, samtidigt som linjens lutning ger mig ett för lågt värde på genomskinligheten. Sambandet mellan den *skenbara* ändringen i solarkonstanten och den *skenbara* ändringen i luftens genomskinlighet från det verkliga värde den har vid början av observationsserien kan, såvida båda ej äro för stora, uttryckas genom en likhet av samma utseende som (4), nämligen:

$$\frac{\Delta I_0}{I_0 \cdot n} = -\frac{\Delta \beta}{\beta}$$

vars härledning kan ske på liknande sätt som i det ovan

berörda fallet, endast att såväl variationen ΔI_0, som $\Delta \beta$ i det nuvarande fallet betraktas som skenbara. En närmare granskning av förhållandena visar, att ett skenbart värde på genomskinligheten under observationstiden, som är ett visst antal procent större än det verkliga *medelvärdet* under observationstiden, svarar mot ett solarkonstantvärde, som är ungefär samma antal procent för litet. Om solarkonstantvärdenas skenbara variation *blott* berodde på denna felkälla, skulle jag alltså finna, att då transmissionen avvek ett visst antal procent från det normala, solarkonstanten avvek med ungefär samma belopp i motsatt riktning. Av hr Granqvists tabell 2, finner jag att en variation av den skenbara solarkonstanten från 1,85 till 2,05, alltså med 10 %, svarar mot en variation i β av 9,2 % för våglängden 3,6 μ, en variation av 12,8 % för våglängden 0,512 μ. Variationen i β för de övriga våglängderna ligger i allmänhet mellan dessa tal. De skenbara variationerna äro här sannolikt så stora att de fullkomligt övertäcka de verkliga.

Denna inverkan av fluktuationerna i atmosfärens transmission att ge oss fullkomligt missvisande värden på solarkonstanten, visar sig mycket påfallande i vissa ogynnsamma fall. Stundom kan den ovan beskrivna beräkningsmetoden till och med ge mig *negativa(!)* värden på solarkonstanten, utan att absurditeten på annat sätt i mätningarnas gång är påfallande. Detta inträffar någon gång under våra klimatiska betingelser. Abbot har därför för sina observationer utvalt orter med mycket ren atmosfär, där variationerna äro obetydliga och på så sätt helt eller i det närmaste fullständigt, enligt vad jag visat, lyckats undgå denna senast diskuterade felkälla.

Det torde här slutligen böra framhållas, att även *om* man i en framtid, med användandet av ett snart föreliggande rikhaltigare material, skulle kunna konstatera ett samband mellan de av Abbot beräknade solarkonstanterna och de samtidigt funna värdena på luftens genomskinlighet, detta på intet sätt måste betyda att de beräknade värdena på solarkonstanten äro behäftade med fel av denna grund.

Solarkonstantens storlek kan visserligen knappast bero av atmosfärens egenskaper. Men det föreligger ett icke obetydligt antal iakttagelser, som tyda på, att atmosfärens genomskinlighet stundom synes röna inverkan av solaktiviteten, så att t. ex. de elektriska fenomen, som beledsaga stark fläckbildning på solens yta, framkalla kondensationsfenomen och slöjbildningar i de högre luftlagren. På de teorier, som uppställts för att förklara detta ofta iakttagbara fenomen är här ej platsen att ingå. Det bör blott påpekas att även i detta fall, enligt det av Abbot påpekade sambandet mellan solarkonstanten och solfläckstalen, ett högt värde på solarkonstanten borde svara mot ett lågt värde på genomskinligheten hos atmosfären och vice versa.

Professor Granqvist har nu i samband med sin sammanställning av solarkonstantvärdena med atmosfärens genomskinlighet antytt den slutsatsen, att de vanliga absorptionslagarna ej skulle gälla för atmosfären och att särskilt den Bouguerska absorptionslagen ej skulle kunna tillämpas på de mätningar, varom här är fråga. Att så är fallet är ju ej uteslutet fastän på andra grunder. Det energimätande instrumentets dimensioner sätter en viss gräns för våra elementargebits utsträckning över ett visst våglängdsintervall. Det är ej säkert att vi ens inom de små våglängdsintervall, som starkt dispergerande spektroskop och smala bolometerband ge oss möjlighet att undersöka, kunna räkna med en enhetlig absorptionskoefficient och detta är ju villkoret för att den Bouguerska lagen skall kunna tillämpas. En mycket stark absorption i de högsta luftlagren, över vilka vi ej kunna komma med våra instrument, kan även tänkas utesluta vissa våglängdsintervall fullkomligt från vår iakttagelse medelst instrument, vilkas känslighet är begränsad. Härom torde man i allmänhet vara fullt på det klara.

Men jag tror ej, enligt vad jag förut framlagt, att man på frågans nuvarande stadium behöver tillgripa den nödfallsutvägen att misstänka den Bouguerska lagen att ha lurat oss eller utrusta de högsta luftlagren med egenskaper, som undandraga sig vår kontroll. Jag tror mig i det före-

gående ha visat, att vad det Abbotska observationsmaterialet beträffar, det av hr Granqvist påpekade sambandet mellan solarkonstanten och atmosfärens genomskinlighet, om det över huvud taget existerar, lätt kan hänföras till att man hittills försummat att göra klart för sig inflytandet av en liten korrektionsterm, som bör bibringas till de skenbara transmissionskoefficienterna, en korrektionsterm, som av naturliga skäl är beroende av solarkonstantens storlek.

Efter att jag sålunda visat att de av hr Granqvist framförda invändningarna icke behöva innebära en allvarlig stöt mot den uppfattningen att solarkonstanten är variabel, vill jag i en följande uppsats meddela några resultat angående huru de funna variationerna sammanhänga med andra iakttagbara fenomen på solens yta.

Stockholm i oktober 1921.

Nyare undersökningar av korta våglängder.

Av ARVID ODENCRANTS.

Då uppfattningen om dispersion och därmed begreppet spektrum hos en ljuskälla först utbildades, bestämdes dettas utsträckning av ögats känslighet och sträckte sig sålunda i runt tal från 7 000 till 4 000 ångströmsenheter.[1]

När sedan andra observationsmetoder infördes i arbetet, utvidgades gränserna såväl mot längre som mot kortare våglängder. Herschel visade att en termometer påverkades även utom den röda gränsen; genom ett förfinat studium av värmeverkningarna kom man allt längre och längre i denna riktning, isynnerhet sedan man fått klart för sig värmestrålningens vågnatur och lärt sig att på den tillämpa optikens metoder.

Under tiden hade upptäckten av elektriska vågor visat att en strålning fanns, med fullt analog vågnatur men med våglängder av vida större mått. Hertz kom därvid till 60 cm, andra senare forskare småningom ned till 2 mm — så vitt jag vet, det kortaste hittills funna värdet. Under tiden hade övre gränsen för värmevågorna med reststrålemetoden uppflyttats till 0,15 mm, med Woods' utnyttjande av kvartsens anomala dispersion till 0,4 mm. Det är ej mycket som fattas i kontinuitetens vinnande.

Förhållandet å de kortare våglängdernas sida har varit liknande. Första antydningen om att ett nytt område här kunde öppnas för forskningen torde vi böra tillskriva Scheele. I brev från Köping till Gahn talar han 1775 om de uuder-

[1] Ångströmsenheter, förkortat Å.E. och uppkallade efter Anders Jonas Ångström, äro den inom spektralanalytiska arbeten vanligaste längdenheten. 1 Å.E. är $= 10^{-8}$ cm $= 0{,}1\,\mu\mu$.

sökningar som han några år senare offentliggjorde. Han har där låtit ett spektrum falla på med »luna cornea»[1], klorsilver, bestruket papper och finner att den därav orsakade kemiska förändringen ej går parallellt med den visuella ljusstyrkan, utan då man går mot violett bliver allt starkare och starkare. Att han härvid ej även fått någon verkan av det ultravioletta är otänkbart, men väl kan detta hava undgått honom emedan han ej kunde noggrant angiva den gräns där spektrum upphörde att vara synligt. Det blev Ritter och Wollaston som omkr. 1800 klart fastslogo att klorsilvrets svärtning kan följas utanför den synliga strålningens område.

Verkliga mätningar förutsatte dock bättre möjligheter, dels i att här identifiera bestämda punkter, oberoende av det materiel som i form av prisma åstadkom dispersionen, dels en metod att observera som var känsligare än de förut använda. Det första gavs av Fraunhofer genom hans upptäckt av de mörka linjerna i solens spektrum, och av de upptäckter som följde därav; det andra av fotografien. Edm. Becquerel lät 1842 solspektrum falla på en daguerreotypplåt, och kunde därmed avsevärt — till omkring 3 000 Å.E. — utvidga kännedomen om det ultravioletta området.

För arbetet satte dock det i prismat använda flintglaset en gräns; man fann snart att man genom användning av andra prismor, speciellt av kvarts, kunde framtränga vida längre. Gränsen visade sig nu kunna framflyttas till omkring 1 850 Å.E., men här syntes man vara tvungen att giva tappt. Det blev då undersökningar på ett annat område som antydde den nya väg som man måste slå in på.

Det hade nämligen visat sig, att trots alla försök solens spektrum ej kunde följas längre än till omkring 3 000 Å.E., medan man i terrestra spektra hunnit vida längre. Undersökningar av Cornu visade att detta måste tillskrivas luftens

[1] Luna, månen, var det alkemistiska tecknet för silver, luna cornea, eller hornsilver, kallades klorsilvret, som efter smältning blev halvgenomskinligt och gulaktigt som horn.

absorption; redan i ganska korta skikt utövade denna en mycket stark inverkan.

Den tyske forskaren Victor Schumann, egentligen maskiningeniör, men mycket intresserad av optiska och fotografiska undersökningar, lyckades nu klart uppfatta de hinder som förelågo och undanrödja dem. Hans arbeten falla omkr. åren 1885—1900. Luftens absorption borttogs genom att i spektrografen hålla ett gott vakuum eller genom att arbeta i förtunnad vätgasatmosfär. Vidare fann han att gelatinet i de fotografiska plåtarna starkt absorberade korta våglängder; han framställde därför en i det närmaste gelatinfri bromsilverplåt. Slutligen övergick han från kvartsen som material för prisma och linser till den färglösa flusspaten.

Trots stora svårigheter, som på ett lysande sätt övervunnos, lyckades han konstruera en vakuumspektrograf genom vilken han kunde följa strålningen långt bortom 1 850 — som han trodde, till omkring 1 000. Senare har det visat sig dock ej vara längre än till omkr. 1 230.

Våglängdsbestämningarna beredde nämligen stora svårigheter, då man ej med säkerhet kunde extrapolera ur de formler som uttryckte sambandet mellan våglängd och brytning hos flusspaten i det dittills kända området. Schumann hänvisar därför redan 1893 på att dessa svårigheter kunde lösas genom att ersätta prismat med gitter, vare sig plana eller konkavgitter. Själv kom han dock ej att använda dem mer än försöksvis, emedan plangitter syntes honom fordra mera invecklade konstruktioner än prismor, och goda konkavgitter av den nödvändiga, korta fokaldistansen ej stodo honom till buds. Därtill kom att tidigare umbäranden och överansträngning med forskningsarbete vid sidan av det dagliga arbetet i förtid bröto hans krafter.

Det blev den amerikanske forskaren Lyman som upptog detta, och som därvid koncentrerade sig på konkavgittrets användande. Då bortföllo såväl linser som speglar, och alla hänsyn till akromatisering av de förra — en av Schumanns största svårigheter. Med en sinnrik koincidens-

metod av spektra från två spalter kunde han erhålla noggranna våglängdsbestämningar, och sålunda på en gång erövra nya områden och noggrant undersöka såväl de förut kända som de nya. Han bevisade då, att flusspatens absorption satte den gräns vid 1 230 Å.E., som förut omtalats, och lyckades med de nya metoderna tränga fram till 500 Å.E. — ett mycket stort steg.

Sina erfarenheter har han först samlat i det 1914 utgivna arbetet »The Spectroscopy of the extreme ultraviolet» vari han även ägnar Schumanns arbete en vacker hyllning; dock synes han ej hava tillräckligt uppfattat Schumann's ovan anförda framsynthet med avseende på användningen av gitter.

Det var 1917, som Lyman nådde fram mot 500 Å.E. Nu upptogs arbetet av Millikan, vilken jämte sina medarbetare hade Ryerson-laboratoriets i Chicago utsökta hjälpmedel till förfogande.

De nya faktorer, han införde, voro först användning av högspända, kondenserade gnistor — flera hundra tusen volt —. Härmed följde dock att vakuum i röret måste försämras genom gasutveckling från elektroderna; han hade därför en mycket effektiv luftpump — Langmuir's — i ständigt arbete och lät tillräcklig tid förflyta efter varje urladdning för att hålla ett vakuum under 10^{-4} mm Hg. Den effektiva exponeringstiden under ett dygns arbete blev då omkring en halvtimme. Vidare användes gitter av relativt lågt linjetal — 500 till 1 000 linjer pr mm — men däremot sådana att den övervägande energimängden koncentrerades i det ena av första ordningens spektra. Förhållandet mellan gitterkonstant och våglängd blev här för de kortaste våglängderna omkr. 70 i st. f. 3 – 6 som annars är vanligt, men de voro så utsökt väl utförda att resultaten dock blevo förstklassiga. Bäst visade sig ett gitter arbeta, som hade 505,3 linjer pr mm och 83,5 cm brännvidd.

Med dessa anordningar kunde han följa spektra hos kol till 360,5, hos zink till 317,3, hos järn till 271,6, hos silver till 260, och hos nickel ända till *202* Å.E.

Det är således ett avsevärt framsteg, som härmed vunnits, men de konsekvenser, som han drager ur en del av sina mätningar, synas lova än mera.

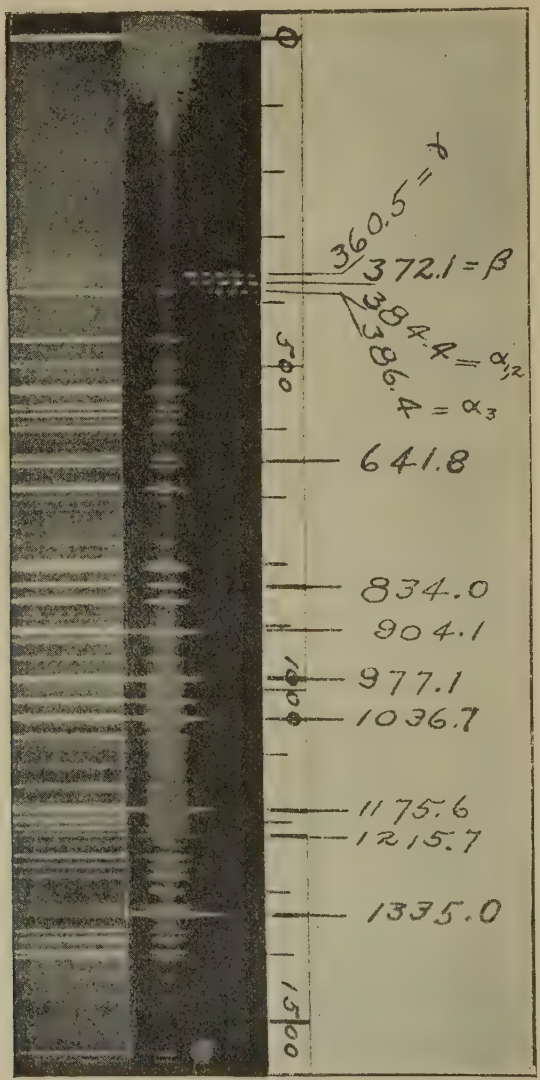


Fig. 1. Kolspektrum.

Kolspektret är av alla de undersökta vackrast och linjerikast. Av dess linjer visa sig en del vara längre än de andra; de synas bero på från elektroderna utvecklade gaser och dels kunna identifieras med vätgaslinjer, dels med en av Lyman konstruerad heliumserie. Egendomligt är dock, att av de många starka vätgas- och heliumlinjer, som man känner över 2 000 Å.E., ingen enda med kvartsoptik kunnat påvisas i gnistans spektrum. Millikan anser därför sannolikt, att åtminstone de linjer, som förut tillskrivits helium, böra överföras till kolets spektrum, då det uppträder i gasform, och att detta stödjes av deras frånvaro i spektrum hos silver, det renaste av de preparat han undersökte.

Kanske än mera märkligt är att det kraftiga och linjerika kolspektret så tvärt upphör redan vid 360 Å.E. De sista linjerna där äro en tämligen tät dublett och två enkellinjer. Att detta ej beror på apparaturen är klart, då Millikan hunnit vida längre med andra ämnen; det måste finnas någon speciell orsak därtill.

Denna söker han i att vi här hunnit in på det område vilket på allra sista tiden visats bortom ultraviolett passa in i spektralserien liksom de elektriska vågorna gjorde det bortom ultrarött — Röntgenstrålarna.

Sedan Laue påvisat och hans lärjungar Friedrichs och Knipping utfört de försök som lämnade beviset för att dessa voro vågrörelser med mycket höga svängningstal, kommo de nya upptäckterna slag i slag, och utvidgade kännedomen om detta område. Röntgenspektrografien blev ett av de mest omtyckta forskningsområdena, och ej minst har arbetet på Fysiska Institutionen i Lund under Siegbahns ledning bidragit till utvidgande och systematisering därinom. Jag behöver ej här närmare ingå därpå, då Friman i denna tidskrift[1] gjort en sammanfattning därav, men vill erinra om några fakta, som äro av betydelse för de slutsatser, Millikan dragit.

Ett ämnes Röntgenspektrum består av linjer vilka tillhöra tre olika serier, kallade K-, L- och M-serien. Av dessa

[1] Årgång 2, sid. 72—81.

har K-serien den kortaste våglängden, M-serien den längsta, L-serien ett medelvärde.

Moseley visar nu att dessa våglängder i alla serierna kunna med större eller mindre noggrannhet uttryckas som funktion av elementets i fråga ordningsnummer N i det periodiska systemet; man har

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = a(N - N_0).$$

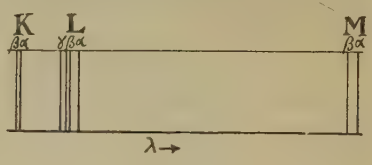


Fig. 2.

Senare tiders noggrannare våglängdsbestämningar hava visserligen visat detta vara blott en approximation, men dock så god att man har mycken nytta därav. Den gäller även för varje enskild linje i de olika serierna, så att dessa återfinnas för varje element i lika relativa lägen.

För alla element kunna dock ej de tre serierna påvisas — så har kunnat ske blott för de tyngsta atomerna. Å ena sidan fordras för utlösande av en viss våglängd, $\lambda = \frac{1}{\nu}$, en spänning ν, som uttryckes av den Einsteinska formeln

$$eV = h\nu$$

där e är atomladdningen och h den Planck'ska elementarkonstanten. Ju mindre λ, desto större svängningstal ν, och desto högre spänning fordras. Härmed är tillsvidare en gräns satt åt kortare våglängden till, vilken verkar än starkare emedan denna »karaktäristiska linjestrålning» ej synes utlösas förr än vid den spänning som fordras för den kortaste våglängden hos elementet i fråga.

Söka vi åter utsträcka serien åt längre våglängder till, försvåras arbetet dels av att dessa strålar äro mycket veka och lätt absorberas, dels av att storleksordningen hos de hittills använda kristallgittren ej tillåter utforskande av de längsta tänkbara strålningarna. Man har därför hejdats vid en våglängd av c:a 12 Å.E., och i K-serien stannat vid ordningstalet 11, i L-serien 33 och i M-serien omkr. 65.

Kontinuitet mellan den kortaste ultravioletta och den längsta Röntgenstrålningen synes sålunda ej finnas.

Nu gör emellertid Millikan det antagandet, att den sista gruppen av fyra linjer i kolspektret, som ovan omnämndes, tillhör dess Röntgenspektrum och, närmare bestämt, L-serien. Hur kan detta motiveras, och är det tänkbart?

Jag erinrade nyss om, att man ej funnit formler som exakt uttrycka sambandet mellan våglängd och ordningsnummer; man kan därför ej med bestämdhet säga var kolets L-serie bör återfinnas här, isynnerhet som denna serie ju blott kunnat följas till n:r 30 och kol har n:r 6. Gynnsammare skulle det ställa sig med K-serien, där man blott behöver extrapolera från n:r 11, och med stor sannolikhet kan antaga att dess linjer böra finnas omkring 45 Å.E.

L-seriens våglängd har nu ett i förhållande till denna någorlunda bestämt läge, vilket ger vid handen att den för kol bör sökas mellan 360 och 430 — således där denna linjegrupp påträffats. Andra formler, vilka sätta våglängden i samband med atomvikten, giva $\lambda = 355$ Å.E. Omöjligt är sålunda ur denna synpunkt ej att Millikans antagande är riktigt.

Till detta kommer ytterligare som ett positivt stöd att gruppens konstitution och intensiteten hos dess linjer överensstämma med vad man förut känner om de linjer som tillhöra L-serien. Så är t. ex. linjen L_α alltid dubbel, liksom här. Vidare har man, då gnistans strålning genom ett kvartsfönster undersökts med fluoroskop, kunnat konstatera en stark emission av mera genomträngande Röntgenstrålar.

Millikans antagande förklarar även otvunget att kolets spektrum så tvärt upphör. Om denna grupp är L-serien, så har man ej att vänta några nya linjer förr än man hinner till K-gruppen, omkring 45 Å.E. — och dess återgivande torde ligga utom den använda apparatens möjligheter.

Om också ej det påvisade tomrummet mellan 202 och 12 Å.E. skulle vara fyllt, hade man dock med dessa försök slagit en brygga däröver.

Nära samtidigt hava även försök gjorts att från andra sidan uppnå detta, således genom att få fram Röntgenstrålning av stor våglängd. En fransk forskare Holweck har sökt finna den lägsta spänning med vilken en dylik strålning kan exciteras, och genom jonisering påvisat detta vara möjligt ända ned till 70 volt; med 100 volt var den kraftig. Det förra skulle svara mot c:a 175 Å.E.

Han undersökte vidare joniseringens styrka för spänningar upp till 600 volt, och fann en kurva som vid 300 volt visade en ändring i stigningen, vilket måhända kan tolkas som en vid denna spänning utlöst karaktäristisk strålning — detta skulle svara mot c:a 40 Å.E. Ur det kortfattade meddelandet kunna dock ej uppgifter för ett närmare bedömande av resultaten erhållas.

Så mycket torde dock kunna sägas, att kontinuitetens erhållande här ej torde vara långt avlägsen. Å ena sidan torde Millikan, som nu förflyttats till ett nytt laboratorium med än större hjälpmedel, komma att utsträcka sina undersökningar; å den andra strävar man efter att finna nya kristaller med annan storleksordning i gitterstrukturen.

Huru dessa resultat låta sig förenas med de teorier som uppställts för sambandet mellan Röntgenspektra och atomkonstitution, kan man än ej säga; vederbörande teoretici synas än ej hava yttrat sig. Måhända kunna deras resultat giva nya uppslag för arbetets inriktande.

Kemiska notiser.

Av G. STARCK.

III. En framställning av koloxid.

Den i skolan brukliga framställningsmetoden för koloxid grundar sig på den s. k. Boudouard'ska jämviktsreaktionen

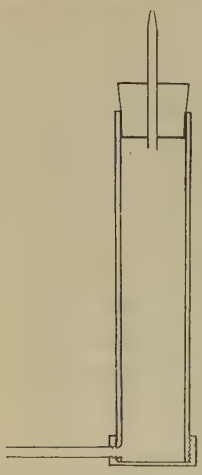
$$C + CO_2 \rightleftarrows 2CO,$$

så benämnd, emedan den undersökts av Boudouard (1901). Framställningen tillgår så, att man leder koldioxid genom ett med träkol fyllt, så starkt som möjligt upphettat glasrör och därifrån genom något absorptionsmedel för koldioxid. De flesta lärare torde i likhet med förf. hava gjort den erfarenheten, att detta försök är mycket vanskligt och ger synnerligen dåligt resultat, om det ger något alls. Förhållandet får en uttömmande förklaring genom den nybestämning av jämvikten i fråga, som 1910 utförts av Rhead och Wheeler. Dessa uppsökte jämviktsläget just från vänstra sidan, d. v. s. de läto koldioxid i ett slutet system cirkulera över rent, till olika temperaturer upphettat träkol och bestämde gasens halt av oxid och dioxid. Följande tabell återger deras mycket intressanta resultat, vilka för övrigt i stort bekräftade de tidigare av Boudouard erhållna (totaltryck 1 atm.).

Upphettn. tid	Temp.	% CO vid jämvikt
240 tim.	850°	93,77
180 »	900	97,78
140 »	950	98,68
48 »	1000	99,41
	1050	99,63
	1100	99,85
	1150	99,94

Jämvikten är således även vid ganska låg temperatur förskjuten till förmån för koloxidbildningen, och man skulle därför vänta att, även om man, så som försöket göres i skolan, ej kommer upp högre än till 7—800°, vid denna temperatur, erhålla ansenliga mängder koloxid. Enligt Boudouard innehåller jämviktsblandningen vid 700° 68 %, vid 800° 90 % CO. Men tabellen visar också, att jämvikten uppnås ytterst långsamt, och detta är orsaken till de dåliga resultaten. Vid 850° var jämvikten säkert konstaterad först efter 10 dygns upphettning. Reaktionshastigheten vid en 100° lägre temperatur måste vara mycket liten.

Då det således ej är några förhoppningar att komma fram på denna väg, och då vidare den bekväma framställningen av koloxid med användning av diverse organiska ämnen av pedagogiska skäl om möjligt bör undvikas, har jag försökt att till föreläsningsförsök ombilda teknikens metod. Med andra ord koloxiden har framställts genom förbränning av kol i en liten generator.



Det första försöket gjordes i en apparat av svårsmält glas, resultatet var synnerligen gott, men materialet motstod ej den höga temperaturen. Jag lät därför förfärdiga en kopia av densamma i järn enligt vidstående figur.

Apparaten består således av ett vanligt smidesjärnrör 400 mm långt, 40 mm i genomskärning, nedtill försett med fastgängad botten och ett ansatsrör för syrgasen. Upptill kork med avloppsrör, beroende på vad man vill göra med gasen. Försöket utföres nu sålunda: röret fylles med pulvriserat träkol, genom siktning befriat från stybb, överst är en tuss av bomull lämplig för att förhindra damning. Botten upphettas till glödning, och en ström av syrgas från bomben påsläppes. För att kontrollera strömmens styrka kan man i början leda en slang från avloppsröret ned i vatten.

Att kolet brinner kraftigt, ser man därpå, att den nedre delen av generatorn, särskilt där syrgasröret inmynnar, är rödglödande, och man reglerar lätt syrgasströmmen därefter. Den övre delen av järnröret håller sig kall. Efter någon minut kan man tända koloxiden; genom att variera syrgasströmmens styrka får man låghöjder från ett par millimeter upp till 3 dm. Man kan även borttaga korken och tända gasen direkt ur järnröret.

Försöket kan också utföras med luft under förutsättning av starkast möjliga bläster och understöd av yttre uppvärmning. Någon självständigt brinnande låga får man dock ej på detta sätt, en liten sticklåga måste hållas vid glasrörets mynning.

Apparaten som ständigt kan stå i ordning, utgör, i förening med en syrgasbomb, en apparat för koloxidutveckling, nästan lika bekväm, som en Kipp's vätgasapparat t. ex.; den är lättare hopsatt och fungerar känsligare än en anordning för framställning medelst oxalsyra eller ferrocyankalium.

Ett par konsekvenser av ovan anförda siffror gällande jämvikten mellan kol, koloxid och koldioxid äro följande:

1) Vid kolets förbränning bildas en blandning av koloxid och koldioxid, över 1000° praktiskt taget endast koloxid.

2) Att förklara koloxidens bildning såsom beroende på en »ofullständig» förbränning eller otillräckligt lufttillträde är oriktigt. Det finnes varken en fullständig eller en ofullständig förbränning av kol. En vältalig illustration till denna sats och till Boudouard's, Rhead's och Wheeler's resultat är det här ovan beskrivna försöket: en ström av rent syre med en hastighet av $\frac{1}{5}$ sekundliter ger koloxid jämte obetydliga, kalkvatten långsamt grumlande mängder koldioxid, där man väl kunde ha skäl att vänta en »fullständig» förbränning.

3) De blåa lågorna, som man ser fladdra över en glödande kolhög, utgöras visserligen av brinnande koloxid, men denna har icke uppkommit av koldioxid, som, bildat i botten, reducerats av det glödande kollager det passerat.

Den är i stället den primära produkten. Varför är för övrigt det överliggande kollagret glödande, när den reaktion, som säges äga rum där, nämligen

$$C + CO_2 = 2CO,$$

är endotermisk?

4) Jämvikten mellan kol, koloxid och koldioxid är av fundamental betydelse för förståelsen av de metallurgiska reduktionsprocesserna, enkannerligen masugnsprocessen. I fråga om dennas fysikaliska kemi hava på senare tid viktiga bidrag lämnats, som motivera en revision av framställningen därav. Detta vidlyftiga ämne faller utom ramen för denna lilla uppsats.

IV. Reaktionen

kvarts + natriumkarbonat $\rightleftarrows$ natriumsilikat + koldioxid, varmed Moll inleder behandlingen av kiselns kemi, kräver för att giva något påtagligt resultat tämligen hög temperatur, som bestämmes av sodans smältpunkt, 860°. En kraftig blästerlåga och en platinadegel torde vara oundgängliga. Genom tillsats av kaliumkarbonat kan smältpunkten nedsättas betydligt, så att reaktionen kan företagas i porslinsdegel, blästerlåga förblir dock nödvändig. Nu är blästern bullersam och tråkig att behöva tillgripa under lektionen; det kan också hända, att institutionen saknar både bläster och platinadegel; slutligen kunna lärjungarna från sina platser icke iakttaga, vad som försiggår i degeln (kolsyreutvecklingen). Medd. har därför sökt att ytterligare pressa ned smältpunkten genom att tillsätta koksalt till blandningen av natrium- och kaliumkarbonat; vid lämpliga proportioner erhålles en blandning, som med lätthet smälter för bunsenlåga i en öppen porslinsdegel. Ännu bättre — den smälter i ett provrör av svårsmält glas, vilket möjliggör ett påvisande med hjälp av kalkvatten, att koldioxid utvecklas.

Ett angivande av de lämpligaste viktproportionerna mellan NaCl, Na_2CO_3 och K_2CO_3 förutsätter kännedom om

detta ternära systems tillståndsdiagram. Någon undersökning härav föreligger ej. Det är rätt anmärkningsvärt, att det viktiga binära systemet Na_2CO_3 — K_2CO_3, som i långa tider använts vid varje silikatanalys, icke blivit undersökt förrän 1894, av *Le Chatelier*. Enligt denna föga ingående undersökning uppvisar systemet ett eutektikum med sammansättningen 48,5 % Na_2CO_3 och smältpunkten 690°. Le Chateliers siffror hava reviderats i en grundlig undersökning av *P. Niggli* (Z. anorg. Ch. *106*, 126; 1919), som visar, att soda och pottaska bilda en kontinuerlig serie av blandningskristaller med ett flackt smältpunktsminimum av 712°, motsvarande en sammansättning av 44—47 mol. % K_2CO_3 (smältpunkterna för de rena salterna äro: K_2CO_3 896°, Na_2CO_3 860°).

Även systemet NaCl — Na_2CO_3 har flyktigt undersökts av Le Chatelier och resultatet reviderats av Niggli (l. c.). Här uppträder ett eutektikum vid cirka 41 mol. % Na_2Cl_2 och 638°.

I saknad av de resurser, som krävas för en fullständig undersökning av systemet NaCl — Na_2CO_3 — K_2CO_3, vilken för övrigt vore obehövlig för här ifrågavarande ändamål, har jag nöjt mig med att medelst en mycket primitiv metod fastslå den ungefärliga koksaltmängd, som tillsatt till den enligt Niggli lägst smältande Na_2CO_3 — K_2CO_3-blandningen synes nedsätta smältpunkten så mycket som möjligt. Genom att bestämma höjden av den låga, som under för övrigt lika förhållanden nätt och jämt höll 10 g blandning smältande, fann jag den gynnsammaste sammansättningen vara 2 delar NaCl, 1 del Na_2CO_3, 1 del K_2CO_3. Härmed är naturligtvis icke sagt, att denna sammansättning skulle ens tillnärmelsevis motsvara det ternära systemets eutektikum.

Denna blandning smälter som sagt med lätthet för bunsenlågan i en porslinsdegel till en lättflytande, vattenklar vätska, som med SiO_2-pulver och även med fin sand ger en livlig CO_2-utveckling. Genom att utföra försöket i ett svårsmält provrör med avledningsrör kan man visa, att den utvecklade gasen grumlar kalkvatten.

Om reaktionerna vid elektroderna vid elektrolys.

Av KNUT HOLMBERG.

Som en viss oklarhet enligt mitt förmenande angående reaktionerna vid elektroderna vid elektrolys är rådande i de läroböcker, som begagnas vid skolundervisningen, vill jag här upptaga några fall till behandling.

För att min tankegång fullt skall förstås vill jag förutskicka några betraktelser över dissociationsteorien i allmänhet. Vi veta, att då denna teori först framställdes, väckte den på sina håll ett ganska våldsamt motstånd. Dess utan fråga mest talangfulle motståndare var prof. Blomstrand i Lund. Blomstrand skriver: Största svårigheten att göra sig dessa märkvärdiga förhållanden för tanken fullt fattliga ligger tydligen däri, att den utspädda koksaltlösningen skall innehålla fritt natrium och fri klor, på samma gång den för övrigt i alla avseenden: frånvaron av lukt, den salta smaken, kemiska reaktioner vilka som helst, förhåller sig som en lösning av koksalt. Att jonerna äro i kemiskt avseende alldeles oberoende av varandra, är att beröva kemien varje möjlighet till en kemisk förklaring, att enorma elektriska laddningar göra det här fria natrium till något väsentligen annat än vad vi annars kalla fritt natrium, den fria kloren till något helt annat än eljest fri klor, motsvarar åtminstone ej den vanliga erfarenheten, för vilken alldeles samma egenskaper hos beståndsdelarna av ett ämne som hos det sammansatta ämnet själv varit något hittills okänt.

Dissociationsteorien tillvann sig ändock på kort tid ett allmänt erkännande. Den elektriskt laddade jonen av

exempelvis natrium har helt andra egenskaper än vanligt natrium d. v. s. då natrium förekommer i molekylarform. Den förra formen sönderdelar ej vatten, vilken egenskap däremot tillkommer den senare. Således vid elektrolys av ett natriumsalt avbörda Na-jonerna först sin elektricitet och övergå i den molekulära formen för att sedan på vanligt sätt reagera med vatten. Utfällningen är således det primära, övergången till vanligt natrium och dess reaktioner det sekundära. Samma sak visar det fenomenet, att man kan erhålla metalliskt natrium även ur en vattenlösning av ett natriumsalt, om man använder flytande kvicksilverkatod.

Om man sticker ned ett Zn-bleck i H_7SO_4 fås $ZnSO_4$, sticker jag däremot ett Cu- eller ett Pt-bleck i H_2SO_4 fås ingenting. Hur detta förklaras från fysikalisk-kemisk synpunkt har icke med hithörande frågor att göra, men påpekas detta i jämförelse med det fenomen, att om jag elektrolyserar H_2SO_4 mellan Cu elektroder fås vid anoden $CuSO_4$, men mellan Pt-elektroden ingen Pt-förening.

Vid elektrolys av H_2SO_4 går SO_4-jonen till anoden avbördar sin elektricitet, men man kan nu ej tänka sig SO_4 under annan form än jon-formen d. v. s. elektriskt laddad. Något oladdat SO_4 existerar icke. Således bildas efter urladdningen först existerbara kemiska föreningar d. v s. i detta fall SO_3 och O_2. Detta syre oxiderar kopparn till CuO, som sedan i sin tur angripes av SO_3 så att $CuSO_4$ bildas

$$CuO + SO_3 = CuSO_4.$$

Vid elektrolys av H_2SO_4 mellan Pt-elektroder bliva fenomenen följande.

Efter SO_4:s urladdning bildas SO_3 och O_2. Syret kan ej oxidera Pt-metallen, därför går det sin väg i form av gas. SO_3 reagerar med vatten enl. formeln:

$$SO_3 + H_2O = H_2SO_4.$$

Det bör här påpekas, att vid elektrolys mellan Cu elektroder av H_2SO_4 förloppet även kan tänkas helt eller

delvis gå så att H_2SO_4 bildas, men

$$CuO + H_2SO_4 = CuSO_4 + H_2O.$$

Slutresultatet blir i varje fall detsamma.

Många andra exempel skulle kunna givas, men de anförda må vara nog. Jag har velat göra dessa påpekanden, då man icke sällan finner den enligt min mening fullkomligt orimliga reaktionsformeln

$$Cu + SO_4 = CuSO_4$$

anföras såväl i läroböcker som vid undervisningen.

Bemötande av förestående uppsats

av **OTTO GALLANDER.**

Lektor Holmbergs teori för elektrolys av $CuSO_4$ kan ej experimentellt prövas och synes mig ej bidraga till en djupare uppfattning av fenomenet.

Det torde vara enklare och riktigare att tänka sig följande tolkning av förloppet vid användning av Cu-anod.

Anoden har en viss benägenhet att utsända Cu-joner. Då en Cu-jon mottagit 2 elektroner vid katoden och utfallit på denna, avlämnar en av annodens Cu-atomer 2 elektroner till denna och går i lösning som jon. Den håller sedan elektrisk jämvikt mot den SO_4-jon, som blev »makalös» därigenom att en Cu-jon utföll vid katoden.

Vid elektrolys av $CuSO_4$ med Pt anod får man med samma uppfattning av fenomenet tänka sig följande förlopp.

Vid anoden måste *en* tvåvärdig eller två envärdiga joner utfalla, då en Cu-jon utfallit vid katoden. Vid anoden finnas SO_4- och OH-joner (samt O-joner). SO_4-joner ha större benägenhet att hålla sig i jonform än OH-joner, det vill från elektronteoriens synpunkt säga, att SO_4-joner binda starkare sina extra elektroner än vad OH-joner göra. OH-joner avbörda därför sina extra-joner åt anoden och utfalla

som vätesuperoxid på denna. Vätesuperoxiden sönderfaller emellertid i H_2O och O utom vid låga temperaturer. Att sedan SO_4-joner måste vandra mot anoden för att kompensera de utfallna negativa jonerna och så uppehålla den elektriska jämvikten är ett sekundärt fenomen, som ej direkt har med elektrolysen att göra.

Genom detta betraktelsesätt blir överensstämmelsen mellan elektrolys av $CuCl_2$ och $CuSO_4$ bättre än med lektor Holmbergs teori.

Vid elektrolys av NaCl med kvicksilverkatod utfaller som bekant Na vid katoden, oaktat H-joner där finnas. Detta beror därpå, att Na under energiutveckling löses i Hg. Na-jonen har därför mindre benägenhet att hålla sig i jonform vid Hg-katod än vid en Pt-katod, under det att H-jonen är relativt oberoende därav. Na-joner utfalla därför, tills ett visst koncentrationsförhållande uppstått mellan Na i Hg-lösningen och Na-joner i elektrolyten.

Hälles vatten på natrium-amalgan, utstötas natriumjoner, tills ett dylikt jämviktsförhållande etablerats. Samtidigt utfalla ekvivalenta mängder H-joner.

En konsekvent tillämpning av här anförda synpunkter leder till att man ej bör tala om sekundära reaktioner vid elektrolys så som förr, och då framställningen härigenom vinner i enkelhet, är det väl på tiden, att vi i skolan använda denna uppfattning.

Den här behandlade frågan är av så stor vikt, att en kvantitativ behandling av densamma torde kunna påräkna intresse, och vår tidskrift kommer därför snart att innehålla en dylik.

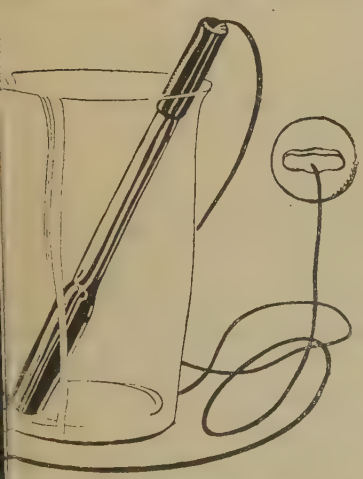
Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Experimentell demonstration av Joules lag.

I handeln har nyligen kommit en av aktiebolaget Elektrolux i Stockholm tillverkad anordning för elektrisk uppvärmning av vätskor, kallad »doppvärmare», bestående av en liten förnicklad kopparcylinder, i vars inre det finnes ett elektriskt värmeelement för omkr. 300 watt. Försök ha visat, att denna apparat är den bästa för förf. bekanta anordning för experimentell demonstration av Joules lag. Apparaten tillverkas för vanliga nätspänningar, och om ej skolans »experimenttavla» omöjliggör det, bör man ha en apparat för nätets spänning. Noggrann reglering av strömmen även vid rätt höga spänningar är önskvärd vid apparatens begagnande. Två för 220 volts spänning avsedda apparater befunnos ha ett motstånd av 143—148 och 152—156 ohm resp. (mätt med volt- och ampermeter), varvid det lägre värdet erhölls vid svag ström och det högre vid nära full belastning. Motståndet växer således vid stigande temperatur med omkr. 4 %. Om en dylik apparat placeras i en kalorimeter med vatten, och strömmar av 0,3, 0,6 och 0,9 amper ledas genom den under lika tider, erhållas uppvärmningar, som äro nära prop. mot talen 1, 4 och 9. Vid en föreläsningskurs, då en om resultatet okunnig åhörare avläste, erhölls 0,7, 2,8 och 6,4 grader resp., varvid 250 gram vatten användes och strömmarna voro slutna 1 minut. Avvikelserna pläga icke överstiga 0,1 grad, utom för det högsta värdet, som blir något för stort på grund av motståndsökningen i apparaten. Före försöket med 0,9 amper

rsättes det något uppvärmda vattnet med en lika stor ikt kallt vatten, så att strålningen från kalorimetern skall erka mindre störande. »Shuntkoppling» på de vanliga xperimenttavlorna torde i allmänhet vara lämpligast för örsökets utförande.

Av det sagda framgår, att man på ett fullt tillfreds-tällande sätt kan visa, att värmeutvecklingen i en ström-



bana är prop. mot kvadraten på strömstyrkan. För den andra delen av försöket, bestämning av konstanten i Joules lag, erbjuder apparaten den nackdelen, att dess s. k. vattenvärde ej är bekant. Då dess vikt understiger 100 gram, kan det dock ej vara så stort. Genom att bädda in den i bomull tillsammans med en termometer och leda svaga strömmar genom den några sekunder, har förf. funnit värden mellan 10 och 12, ket rätt väl stämmer med vad man kan vänta av dess t. Om man vid bestämningen av konstanten använder kalorimeter med t. ex. 500 gram vatten, kommer ett fel 5 enheter i apparatens vattenvärde dock icke att göra ra än 1 % relativt fel i resultatet; har man 250 gram tten, blir felet 2 %. Förf. tror, att befintligheten av ett ikt fel i ett skolförsök icke gör så stor skada, om man lt påpekar dess existens och beräknar, hur mycket det gynnsammaste fall kan inverka på resultatet. Man kan cket väl använda så mycket som 500 gram vatten, då na kvantitet uppvärmes nära 10 grader på en minut, apparaten fullt belastas. Och använder man volt- och permeter för bestämning av den elektriska effekten, gör tståndets ökning i apparaten ingen skada. — Det ovan ivna försöket med 0,9 amper ger ett värde på konstanten

av 0,236, då apparatens motstånd är 148 ohm, kalorimeterns vattenvärde 4 och apparatens vattenvärde antages vara 11. Den sista decimalen är naturligtvis osäker. Flera försök ha givit värden mellan 0,23 och 0,24.

Svanström & Rylander, aktiebolag för skolmateriell, Stockholm, har på förf.:s begäran lovat tillhandahålla apparaten. *Magnus Lemoine.*

Ett påpekande beträffande en nyutkommen populärvetenskaplig skrift.

Varje fysiker vet, huru mycken oreda i fysik och teknik under gångna tider förorsakats genom förblandningen av begreppen *kraft*, *arbete* och *effekt*. Det var t. ex en dylik förväxling som hindrade den store fysikern Faraday att ansluta sig till J. R. Mayers idéer angående den mekaniska värmeteorin, och att dessa idéer ej på länge vunno sitt erkännande berodde huvudsakligen på att Mayer själv ej var på det klara angående dessa begrepp.

Numera, sedan fysikerna klargjort frågan, borde dock några dylika förväxlingar ej förekomma, åtminstone ej hos naturvetenskapligt bildade författare.

Emellertid är det sorgligt att se, hur litet detta är förhållandet: I en nyligen utkommen bok, »Kraft och kultur» av professor Gunnar Andersson, läses t. ex. på sidan 8:[1] »Här kan lämpligen erinras därom att den *kraft* som åtgår för att lyfta 1 kg lodrätt i höjden *under 1 sekund*, benämnes en kilogrammeter. 75 sådana benämnas en hästkraft, ett numera internationellt antaget *kraftmått*. Den elektriska *kraften* mätes oftast i kilowatt (kw), vilket motsvarar 1,36 hästkraft. En kilowattimme (kwt) blir sålunda den *kraft som alstras under en timme* av en kilowatt.»

Ett värre samelsurium torde svårligen påträffas ens i förra århundradens naturvetenskapliga litteratur.

[1] Alla kursiveringar gjorda här.

På sid. 15 står: »att vid en vindstyrka av 5^m, vinden på varje kvadratmeter utövar *ett tryck, motsvarande 0,1 hästkrafts arbete*».

På sid. 19 införes det i fysiken hittills okända begreppet »*dygnkraft*». Härmed kan förnuftigtvis intet annat avses än produkten av kraft och tid. Det skall vara Red. ett utsökt nöje att mot en ytterst ringa avgift per stycke ställa till förf:s förfogande ett så stort antal kilogramdygn (eller megadyntimmar) han kan önska — om han annars anser sig kunna göra någon nytta med desamma.

På sid. 18 och 19 står: »En frisk vind ger med en medelstor vindmotor låt oss säga *25 kw pr timme eller 600 kw pr dygn.*»

På sid. 24 står, att 36 kbm vatten skall falla 10 meter *under en timme* för att vid 75 % verkningsgrad alstra 270,000 kgm. På samma sida står vidare, att man med *kraften* 270,000 kgm kan lyfta 270 ton *2 meter* (sic!).

Även andra fysikaliska fel av graverande beskaffenhet finnas:

På sid. 20 står t. ex.: »Med vinden som *motor och energikälla* framdrivas under storm vågorna mot kusterna med oerhörd kraft.»

På sid. 21 läses: »envar kan lätt uppskatta det rinnande vattnets *arbetsförmåga* genom att beskåda de ofta väldiga sten och grusmassor det transporterar *från högre liggande till lägre ställen*».

O. s. v.

För en lärare, som år efter år söker bibringa ungdomen klarhet i de fysikaliska begreppen, är det ganska bedrövligt att se, hur resultatet av hans arbete skall motarbetas av en bok som är författad av en framstående naturvetenskapsman och, som i så många andra avseenden är intressant och lärorik och därför för de unga bör stå som en auktoritet, ja t. o. m. kan ifrågakomma som premiebok för densamma.

Matematiska uppgifter.

103) I en inskrivbar fyrhörning äro sidorna i ordning a, b, c, d.

Visa, att radien R till den cirkel, i vilken en fyrhörning med sidorna a, b, c, d i godtycklig ordningsföljd kan inskrivas, är

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}=\frac{D_{ab}D_{ac}D_{ad}}{4Y}$$

där Y föreställer fyrhörningens yta, p halva summan av sidorna och D_{ab}, D_{ac}, D_{ad} de diagonalkordor, som sammanbinda ändpunkterna av genom index angivna intill varandra stående kordor, eller med andra ord samtliga de diagonalkordor, som kunna erhållas genom att man varierar sidornas inbördes ordningsföljd.

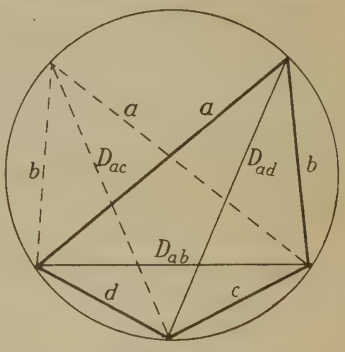


Fig. 1.

Visa även, att den i cirkeln inskrivna fyrhörningens yta, ävensom de tre diagonalkordorna enligt ovanstående, förbliva oförändrade till sina värden, om man i stället för a, b, c, d insätter dessa sidors dubbla avstånd från cirkelns medelpunkt. *Hj. Anér.*

104) $ABCD$ är en parallellogram i vilken diagonalen BD och sidorna BC och CD äro utdragna. Drag genom hörnet A en linje som skär BD, BC och CD i P, Q, R, resp., så att $\frac{PQ}{PR}$ har ett givet förhållande.

105) A är en punkt på en cirkel, B en punkt på tangenten i A. Sök den punkt P på cirkeln, där summan av eller skillnaden mellan kvadraterna på PA och PB är maximum eller minumum. *M—r.*

106) Om a, b, $c \ldots l$, m äro primtal och α, β, $\gamma \ldots \lambda$, μ hela tal, så innehåller talet $N=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}m^{\mu}$ divisorer till

ett antal av $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots(1+\lambda)(1+\mu)$, däri inberäknade talen 1 och N.

107) ABC är en triangel, där O är bissektrisernas skärningspunkt. M är en given punkt, vars spegelbilder i OA, OB och OC kallas M_a, M_b, M_c resp. Visa att AM_a, BM_b och CM träffas i en punkt.

108) En cirkel och två punkter P och Q inom eller utom densamma äro givna. Man betraktar alla i cirkeln inskrivna trianglar ABC, sådana att AB går genom P och AC genom Q. När är sidan BC maximum eller minimum?

Lösningar till uppgifterna i h. 4. 1920—21.

91) *Produkten av 2 siffror och det av dem bildade 2-siffriga talet är ett flersiffrigt tal, innehållande endast en av de nämnda siffrorna såsom siffror. Sök dessa siffror.*

Om produkten är tvåsiffrig, så hava vi

$$x \cdot y \cdot (10x+y) = 11x \text{ eller } 11y$$

vadan $x=y=1$. Är produkten tresiffrig, så fås

$$xy(10x+y) = 111x = 3 \cdot 37x \text{ eller } = 111y = 3 \cdot 37y.$$

Således $y(10x+y) = 3 \cdot 37$ eller $x(10x+y) = 3 \cdot 37$.
Det förra är orimligt, det senare ger

$$x=3,\ y=7.$$

Om produkten vore fyrsiffrig, så skulle vi hava

$$xy(10x+y) = 1111x = 11 \cdot 101x \text{ eller } = 11 \cdot 101y.$$

Vilka genast inses vara orimliga. Siffrorna äro således 1, 1 eller 3, 7. (Löst av *X*.)

92) $\frac{15}{8}$ *av ett fyrsiffrigt tal är kvadraten på det tal, som bildas av de två sista siffrorna i halva talet. Sök talet.*

Halva talet måste vara 3- eller 4-siffrigt. Kallas det $100x+y$, så fås $\frac{15}{4}(100x+y) = y^2$. y är således divisibelt med 15, och $100x+y$ med 4. y är således divisibelt med 15 och med 4 och är således 60. Halva talet $(100x+y)$ är således $\frac{4 \cdot 3600}{15} = 960$ och talet 1920.

(Löst av *X* och *Mauritz Hauge*.)

93) *Visa att* $\lim_{n=\infty}\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right)\left(1-tg^2\frac{x}{4}\right)\left(1-tg^2\frac{x}{8}\right)\ldots\left(1-tg^2\frac{x}{2^n}\right)=x\cot x.$

Genom användande av formeln $1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ fås

produkten $\Pi_n=\frac{\cos x}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{4}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{4}}{\cos^2\frac{x}{8}}\ldots\frac{\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{\cos^2\frac{x}{2^n}}=$

$$=\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^n}}$$

och om på nämnaren användes formeln

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},\text{ så fås}$$

$$\Pi_n=\frac{\cos x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{4}\cdot 2\sin\frac{x}{8}\ldots 2\sin\frac{x}{2^n}}{\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\ldots\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\cos\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\frac{\cot x\cdot 2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\cos\frac{x}{2^n}}=\frac{\cot x}{\cos\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot x,$$

men som bekant är $\lim_{\delta=0}\frac{\sin\delta}{\delta}=1$ och $\lim_{\delta=0}\cos\delta=1,$

varav fås $\lim_{n=\infty}\Pi_n=x\cdot\cot x.$

(Löst av *X*.)

94) *Om a och b äro koordinaterna för en punkt P i planet, var skulle P ligga för att uttrycket*

$$y=\frac{x^2-6bx+4a}{4ax^2-6bx+1}$$

ej skall hava något maximum eller minimum?

Löses ovanstående ekvation med avseende å x, så fås

$$x=\frac{3b(y-1)\pm\sqrt{(9b^2-4a)y^2-(18b^2-16a^2-1)y+9b^2-4a}}{4ay-1}.$$

Diskriminanten till uttrycket inom rotmärket är

$$(18b^2-16a^2-1)^2-4(9b^2-4a)^2=$$
$$=(4a-1)^2(16a^2-36b^2+8a+1).$$

Det sökta villkoret är således att sista faktorn skall vara negativ. Men denna faktor kan skrivas

$$D=(4a+1+6b)(4a+1-6b).$$

Sättes då $D=0$, så kan den teckna sågom de båda sneda linjerna i fig. 2, och lätt inses, att dessa båda linjer hava sin positiva sida åt Origo till. Det sökta området är därför de båda vinklarna BCA_1 och ACB_1. För $a=\frac{1}{4}$ är y konstant.

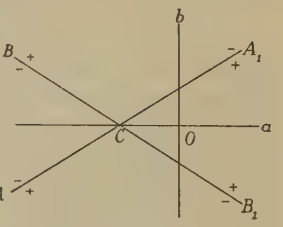


Fig. 2.

(Löst av *Mauritz Hauge* och *X*.)

Signaturen X har även givit en allmän undersökning av när funktionen $\frac{Ax^2+2Bx+C}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$ saknar extremvärden, vilken undersökning här anföres.

Vi söka allmänt villkoret för att funktionen

$$y=f(x)=\frac{Ax^2+2Bx+C}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$$

skall sakna extremum. Alla koefficienter förutsättas reella; dessutom antages att täljaren, $T(x)$, och nämnaren $N(x)$ icke hava någon gemensam faktor, som innehåller x, samt slutligen att $\alpha\neq 0$. Det visar sig lämpligt att införa funktionen $F(x)=\alpha f(x)-A=\frac{2(B\alpha-A\beta)x+C\alpha-A\gamma}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}=\frac{T_1(x)}{N(x)}$,

($T_1 = \alpha T - AN$), som tydligen saknar max. och min. på samma gång som $f(x)$. $f(x)$ säges sakna extremum, om varje öppet kontinuitetsintervall saknar sådant m. a. o., om $f(x)$ är kontinuerlig för $k_1 < x < k_2$, får funktionen ej taga ett extremvärde för något x mellan k_1 och k_2, hur dessa gränser än väljas.

Har $N(x)=0$ komplexa rötter, är det tillräckligt att sätta $k_1 = -\infty$; $k_2 = +\infty$; har $N(x)=0$ de reella rötterna r_1, $r_2 (r_1 < r_2)$, har man de tre intervallen $k_1 = -\infty$, $k_2 = r_1$; $k = r_1$, $k_2 = r_2$ och $k_1 = r_2$, $k_2 = +\infty$; har $N(x)=0$ dubbelroten r_1, får man sätta $k_1 = -\infty$, $k_2 = r_1$ och $k_1 = r_1$, $k_2 = +\infty$.

Allt detta följer därav, att $f(x)$ (och $F(x)$) icke har några andra diskontinuitetspunkter än nämnarens (reella) nollställen.

1. $N(x)=0$ *har komplexa rötter.* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Närmar $F(x)$ sig i bägge fallen till 0 från samma sida måste åtminstone ett extremum finnas. Sker närmandet till 0 från olika sidor, har $F(x)$ ett ändligt nollställe och följaktligen åtminstone två extrema. $N(x)=0$ måste alltså ha reella rötter.

2. $N(x)=0$ *har de reella rötterna* r_1, r_2; $r_1 < r_2$.

a. $T_1(x)=0$ har ej sitt nollställe mellan r_1 och r_2 eller saknar sådant ($B = A\beta$). Detta är liktydigt med $T_1(r_1) \cdot T_1(r_2) = \alpha^2 T(r_1) \cdot T(r_2) > 0$ Då byter $F(x)$ icke tecken mellan r_1 och r_2 och har således ett extremum i interv. $r_1 < x < r_2$, emedan $F(r_1 + \varepsilon)$ och $F(r_2 - \mu)$ samtidigt gå mot $+\infty$ eller $-\infty$, då ε och μ genom positiva värden gå mot 0.

b. $T_1(r_1) \cdot T_2(r_2) < 0$ d. v. s. $T(r_1) \cdot T(r_2) < 0$. I detta fall gäller ej vår slutsats i *a*. Det skall strax visas, att $f(x)$ verkligen saknar extremum i detta fall.

c. $T(r_1) \cdot T(r_2) = 0$. Då skulle täljare och nämnare ha åtminstone ett gemensamt nollställe.

3. $N(x) = \alpha (x - r_1)^2$. $F(x) = \dfrac{2(B\alpha - A\beta)x + C\alpha - A\gamma}{N(x)}$.

Är $B\alpha \neq A\beta$, har täljaren ett nollställe och då måste $F(x)$ ha ett extremum mellan denna punkt och den på samma sida om r_1 belägna oändlighetspunkten.

Är åter $B\alpha - A\beta = 0$ förhåller sig $F(x)$ som $\frac{1}{x^2}$ och saknar således extremum. Vi ha alltså

Första fallet: $f(x) = \frac{Ax^2 + 2Bx + C}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$ saknar extremum, om $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, $B\alpha - A\beta = 0$, $\alpha \neq 0$. Man kan här låta förutsättningen att $T(x)$ och $N(x)$ sakna gemensam faktor falla. Bortförkortas nämligen denna faktor $x - r$ eller $(x - r)^2$, blir $f(x)$ av typen $\frac{1}{x}$, eller 1 och dessa sakna bägge extremum åtminstone i sträng mening.

Andra fallet: $R = \alpha^2 T(r_1) \cdot T(r_2) < 0$. Då äro r_1, r_2 distinkta och reella.

Vore nämligen r_1, r_2 komplexa, måste $T(r_1)$ och $T(r_2)$ vara konjugatkvantiteter och följaktligen ha positiv produkt. Är $r_1 = r_2$, måste de vara reella och $[T(r_1)]^2$ är positiv. Vidare kunna ej $T = 0$ och $N = 0$ hava en gemensam rot, ty då skulle $R = 0$.[1] Förutsättningen $R < 0$ leder alltså till fallet 2, *b*. Antag nu, att $f(x)$ toge extremvärdet m för $x = x_1$. Då skulle enligt känd princip ekvationen $f(x) - m = 0$ d. v. s. $T(x) - m\,N(x) = 0$ ha dubbelroten x_0. Detta är omöjligt emedan vänstra membrum tar värden med olika tecken nämligen $T(r_1)$ och $T(r_2)$ för $x = r_1$ resp. r_2. Mellan dessa ligger alltså en enkel rot. Den andra (om $T(x)$ är av andra graden) måste ligga utanför detta intervall.

$R < 0$ är alltså ett tillräckligt villkor för frånvaro av extremum. Vi kunna nu även tillåta gemensam faktor för $T(x)$ och $N(x)$. Är denna av andra graden, blir $f(x)$ efter dess bortförkortning av typen 1 och är den av första graden, blir $F(x)$ efter samma operation av typen $\frac{1}{x}$. I bägge fallen saknas extremum.

Vårt resultat är alltså:

$$f(x) = \frac{Ax^2 + 2Bx + C}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = \frac{T(x)}{N(x)},$$

[1] R kallas resultanten till $T(x)$ och $N(x)$ på grund av denna egenskap.

där $N(x)$ är av andra graden, saknar extremum, om

A. *$T(x)$ och $N(x)$ ha en gemensam faktor, som innehåller x,*

B. $R=\alpha^2 T(r_1)\cdot T(r_2)<0$,

C. $\beta^2-\alpha\gamma=0$, $B\alpha-A\beta=0$, $\alpha\neq 0$, *$T(x)$ och $N(x)$ sakna gemensam faktor.*

Fallen A och B kunna sammanfattas i $R\leqq 0$.

För $R=T_1(r_1)\cdot T_1(r_2)$ finner man lätt ett uttryck, som befinnes vara identiskt med

$$(A\gamma+C\alpha-2B\beta)^2-4(B^2-AC)(\beta^2-\alpha\gamma).$$

Till denna form för R kommer man direkt, om man uttrycker villkoret för att ekvationen $f(x)-m=0$, d. v. s.

$$(A-m\alpha)x^2+2(B-m\beta)x+C-m\gamma=0$$

för alla reella värden på m skall sakna dubbelrot.

Diskriminanten $(B-m\beta)^2-(A-m\alpha)(C-m\gamma)=$ $=(\beta^2-\alpha\gamma)m^2-(A\gamma+C\alpha-2B\beta)m+B^2-AC$ får då icke försvinna för något reellt värde på m och härför är det nödvändiga och tillräckliga villkoret just[1] $R<0$, där R har den ovan angivna formen. (Däremot är $R<0$ intet nödvändigt villkor för att $f(x)$ skall sakna extremum som vi redan funnit.) En annan form för R erhålles, om man fordrar att täljaren i $\frac{1}{2}f'(x)$, d. v. s. $\frac{1}{2}(T'(x)\cdot N(x)-T(x)\cdot N(x))=$ $=(A\beta-B\alpha)x^2+(A\gamma-C\alpha)x+B\gamma-C\beta$ skall sakna reella nollställen. Villkoret därför blir just[1]

$$R=(A\gamma-C\alpha)^2-4(A\beta-B\alpha)(B\gamma-C\beta)<0.$$

I R ingå koefficienterna till $T(x)$ och $N(x)$ symmetriskt, och den algebraiska innebörden i $R<0$ kan sägas vara den, att ekvationerna $T(x)=0$, $N(x)=0$ bägge ha reella rötter så belägna, att endast *en* rot till den ena ekv. ligger mellan den andra ekvationens. För att detta skall gälla allmänt måste man anse, att ∞ är en rot till $T(x)=0$, om dess gradtal (för $A=0$) sjunker till 1 och på samma sätt för $N(x)=0$, om $\alpha=0$. För fullständighets skull vilja vi till

[1] Här anses ∞ vara enkel rot till en ekv. av i allmänhet andra graden, då dess gradtal i ett speciellt fall nedsjunker till 1, och dubbel rot om gradtalet blir 0.

sist betrakta även detta sista hittills uteslutna fall. Man finner genom likartade betraktelser att

$$f(x) = \frac{Ax^2+2Bx+C}{2\beta x+\gamma}, \quad \beta \neq 0,$$

saknar extremum, om

A. $R = 0$. Då ha täljare och nämnare ett gemensamt nollställe.

B. $R < 0$. Då har täljaren reella distinkta nollställen, och mellan dessa ligger nämnarens.

Skulle även $\beta = 0$, har $f(x)$ naturligtvis ett extremum, om $A \neq 0$, då ju funktionen är av typen x^2; för $A = 0$ saknas extremum. I förra fallet är $R > 0$, i senare fallet är $R = 0$.

Sammanfattning: $f(x) = \frac{Ax^2+2Bx+C}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$ saknar extremum i tre fall, nämligen om

1:o) $R = 0$, 2:o) $R < 0$, 3:o) $\alpha \neq 0$, $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, $A\beta - B\alpha = 0$.

I uppgift 94 finner man för R uttrycket

$$(1-4a)^2(1+4a+6b)(1+4a-6b).$$

Således är $R = 0$ på linjerna $a = \frac{1}{4}$, $\frac{a}{\left(-\frac{1}{4}\right)} + \frac{b}{\left(-\frac{1}{6}\right)} = 1$

$\frac{a}{\left(-\frac{1}{4}\right)} + \frac{b}{\left(-\frac{1}{6}\right)} = 1$. De sista linjerna råkas i $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ och äro tangenter till parabeln $9b^2 - 4a = 0$. Tangentkordan är $a = \frac{1}{4}$.

Om $a = \frac{1}{4}$ äro täljare och nämnare identiska. Ligger (a, b) på en av de andra linjerna, ha täljare och nämnare en lineär faktor gemensam, utom för skärningspunkten $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, då den gemensamma faktorn är av andra graden.

Ligger (a, b) på $9b^2 - 4a = 0$, ha både täljare och nämnare sammanfallande nollställen. $R < 0$ då (a, b) faller inom tvenne av de fyra områden i vilka planet indelas av $4a \pm 3b + 1 = 0$, nämligen inom dem, som ej innehålla a-axeln, och dessutom $a \neq \frac{1}{4}$.

Fallet 3:o) kräver $a \neq 0$, $9b^2 - 4a = 0$, $-3b + 12ab = 0$, d. v. s. $b \neq 0$, $3b(4a - 1) = 0$ alltså $a = \frac{1}{4}$ och ger således intet nytt.

95) *ABCD är en konvex fyrhörning, omskriven kring en cirkel O. Visa att* $\left(\frac{OA}{OC}\right)^2 = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}$.

(Obs.! i problemets formulering står genom tryckfel *OB* i st. f. *OC*.)

Kallas vinklarna vid A, B, C, D för α, β, γ, δ resp., så fås omedelbart ur sin-teoremet:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}; \quad \frac{AD}{OA} = \frac{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}; \quad \frac{CB}{OC} = \frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}};$$

$$\frac{CD}{OC} = \frac{\sin\frac{\gamma+\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Således

$$\frac{AB \cdot AD}{OA^2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta-\delta}{2} - \cos\frac{2\alpha+\beta+\delta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}};$$

$$\frac{CB \cdot CD}{OC^2} = \frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\gamma+\delta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta-\delta}{2} - \cos\frac{2\gamma+\beta+\delta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Men då $\frac{2\alpha+\beta+\delta}{2}+\frac{2\gamma+\beta+\delta}{2}=\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$,

så följer att $$\frac{AB\cdot AD}{\overline{OA}^2}=\frac{CB\cdot CD}{\overline{OC}^2},$$

vilket är detsamma som skulle bevisas.

Anm. Det är ej nödvändigt att fyrhörningen är konvex.

X.

96) *Två varandra skärande linjer och en punkt P i planet äro givna. Att genom P draga en linje, så att den bildade triangeln får given yta (T).*

A. *Geometrisk lösning.*

Låt de givna linjerna a och b råkas i O och låt P ligga i den spetsiga vinkeln α mellan a och b, fig. 3. Drag en linje OQ, som med a gör samma vinkel som OP gör med b och åt motsatt sida. Bestäm längden av OQ så, att $OP\cdot OQ=\frac{2T}{\sin\alpha}$.

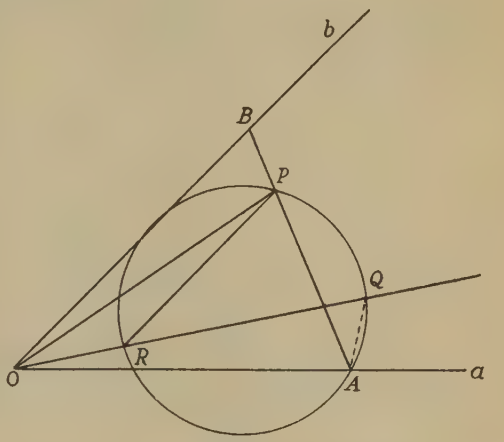


Fig. 3.

Drag från P till OQ en linje $PR \parallel b$. Låt den skära OQ i R och omskriv triangeln PQR med en cirkel, som skär a i A. Drag PA, som skär b i B. Linjen APB är den sökta.

Nu är $\angle AOP=BOR=PRQ=PAQ.$

Således $\angle OPB=OAQ.$ Vidare är

$\angle BOP=QOA.$

Således $\triangle OPB\sim OAQ,$

varav $\frac{OA}{OP}=\frac{OQ}{OB}$ eller $OA\cdot OB=OP\cdot OQ=\frac{2T}{\sin\alpha}$.

Ligger P i den trubbiga vinkeln, så blir lösningen densamma, men beviset något olika, vilket dock lätt inses, då man blott har att utbyta vissa vinklar mot deras supplement.

Genom att i st. f. A taga cirkelns andra skärningspunkt med a fås i allmänhet en linje till. Likaledes två andra genom att taga OQ åt motsatt håll. Man kan därför erhålla 4, 3 eller 2 lösningar för givna a, b och P.

X.

B. *Algebraisk lösning.*

Om P_1 och P_2 äro den sökta linjens skärningspunkter med a och b, y_0 och y_1 äro perpendiklarna från P och P_1 mot b samt x P_2:s avstånd från skärningspunkten O, och slutligen c avståndet utefter b från O till en med a parallell linje genom P, så fås genast

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{x}{x-c} \quad \text{och} \quad T = \frac{1}{2} x y_1.$$

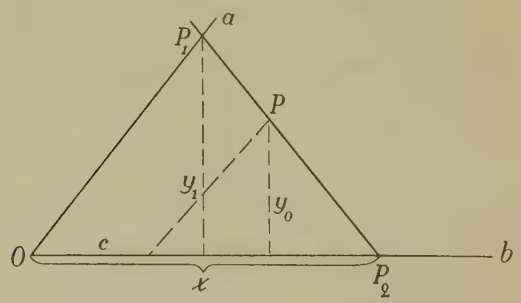


Fig. 4.

Elimineras y_1, så fås

$$x = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 2Tcy_0}}{y_0},$$

ett uttryck som ju kan konstrueras.

Anm. Genom ett rätvinkligt koordinatsystem kan naturligen även fås ett uttryck för x, men detta blir krångligare.

Mauritz Hauge.

Några satser i samband med Menelaos' och Cevas transversalsatser.

Av X.

I.

ABC är en triangel med sidorna $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ och ytan T. I denna är inskriven triangeln $A'B'C'$ såsom fig. 1 anger. Ytan av denna triangel vare T'. Det gäller att finna ett uttryck för $T' : T$, sedan punkterna A', B', C'

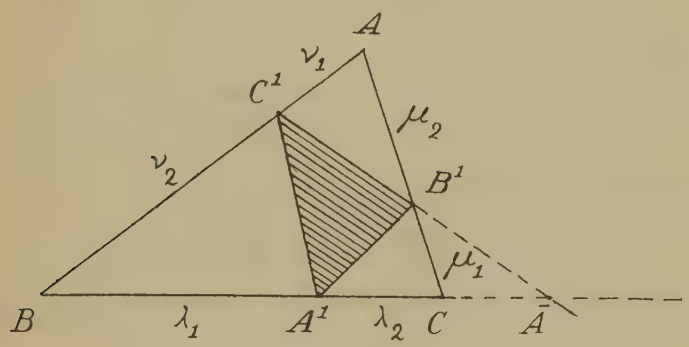


Fig. 1.

fixerats på lämpligt sätt. Vi införa först den ena av de bägge möjliga omloppsriktningarna kring ABC, låt vara $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$. Tänka vi oss sedan triangelsidorna utdragna åt bägge hållen, kunna vi fastställa som positiv riktning på BC riktn. $B \rightarrow C$, på CA riktn. $C \rightarrow A$ och på AB riktn. $A \rightarrow B$. Då bestämmas A', B', C' entydigt av de tre talen $\lambda_1 = BA'$, $\mu_1 = CB'$, $\nu_1 = AC'$, där λ_1, μ_1, ν_1 äro positiva allt efter som riktn. $B \rightarrow A'$, o. s. v. äro pos. eller neg. Utgå vi stället från den andra omloppsriktn. $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$, kunna A', B', C' på analogt sätt entydigt fixeras medels

$\lambda_2 = CA'$, $\mu_2 = AB'$, $\nu_2 = BC'$ med motsvarande föreskrift för teckenvalet. Det är klart att alltid gäller

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a,\ \mu_1 + \mu_2 = b,\ \nu_1 + \nu_2 = c \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Slutligen införa vi $l = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $m = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, $n = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ och inse lätt, att de tre punkterna A', B', C' äro entydigt bestämda av talen l, m, n.

Ligga nu först A', B', C' på den givna triangelns icke utdragna sidor, äro $\lambda_1, \ldots, \nu_2$ positiva, och man har genast, om T' betyder arean av tillhörande triangel

$$\frac{T'}{T} = \frac{T - \triangle AB'C' - \triangle BC'A' - \triangle CA'B'}{T} =$$

$$= 1 - \frac{\nu_1\mu_2}{bc} - \frac{\lambda_1\nu_2}{ca} - \frac{\mu_1\lambda_2}{ab} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

eller enl. (1)

$$\frac{T'}{T} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)(\nu_1+\nu_2) - \nu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2) - \lambda_1\nu_2(\mu_1+\mu_2) - \mu_1\lambda_2(\nu_1+\nu_2),}{(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)(\nu_1+\nu_2)}$$

varur efter uträkning

$$\frac{T'}{T} = \frac{\lambda_1\mu_1\nu_1 + \lambda_2\mu_2\nu_2}{abc} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

eller efter division av täljare och nämnare med $\lambda_2\mu_2\nu_2$

$$\frac{T'}{T} = \frac{lmn+1}{(1+l)(1+m)(1+n)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dessa formler gälla nu närmast för positiva $\lambda_1, \ldots, \nu_2$. Det är emellertid lätt att inse deras allmänna giltighet sedan man försett högra membrum med tecknet för absolut belopp, ifall man, som vanligt, uppfattar T' som en till sin natur positiv storhet. Fasthållas att börja med λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 vid sina primitiva värden, medan ν_1 passerar o, varvid C' passerar A, blir alltså ν_1 negativ och termen $\frac{\nu_1\mu_2}{bc}$ i (2') byter tecken. Men detta är just den modifikation den geometriska härledningen kräver, emedan $\triangle AB'C'$ för ett sådant

läge av C' skall läggas till, icke dragas från. På samma sätt om ν_2 kontinuerligt passerar o, varvid C' passerar B. I bägge fallen blir n negativ och är $A'B'$ icke $\parallel AB$, inträffar det i endera riktningen för ett visst läge av C', att täljaren i (2) försvinner. Då är $T'=o$, och A', B', C' ligga i rät linje. Vilkoret därför:

$$\lambda_1\mu_1\nu_1+\lambda_2\mu_2\nu_2=o$$

eller

$$lmn=-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

är *Menelaos' bekanta transversalsats.*

Då C' passerar detta läge byter täljaren i (2) tecken och blir negativ, men formeln gäller fortfarande, om högra membrum tages absolut. Så kan man låta även de andra hörnen i den inskrivna triangeln glida ut på de givna triangelsidornas förlängningar. Allmänt kan man säga, att högra membrum i (2) är positivt, om omloppsriktningarna $A\longrightarrow B\longrightarrow C$ och $A'\longrightarrow B'\longrightarrow C'$ överensstämma, eljes negativt. En ändring i omloppsriktningen $A'\longrightarrow B'\longrightarrow C'$ kan nämligen vid triangelns kontinuerliga deformering endast inträffa vid passagen genom läget: A', B', C' i rät linje, men då byter också täljaren tecken. Är $A'B'\parallel AB$, i vilket fall $lm=1$, blir $lmn=-1$ för $n=-1$, vilket motsvarar AB:s oändlighetspunkt. Menelaos' sats gäller alltså även i detta fall; $\frac{T'}{T}$ under formen (3) blir naturligen ett obestämt uttryck $\frac{o}{o}$. Oändligt stor kan ytan T' endast bli, om ett eller två av hörnen A', B', C' faller oändligt långt bort utan att samtidigt $lmn=-1$.

Uttrycket (3) för $\frac{T'}{T}$ är det enklaste möjliga, som uppfyller de villkor man a priori kunde uppställa: att försvinna för $lmn=-1$ och bli oändligt stort, då något av talen l, m, n är -1.

Man observerar, att högra membrum i (2) blir oförändrat, om λ_1 och λ_2, μ_1 och μ_2, ν_1 och ν_2 samtidigt byta plats. Därav satsen:

Två trianglar $A'B'C'$, $A''B''C''$ äro inskrivna i samma triangel ABC. Ligga de på varje sida i ABC belägna hörnen i de inskrivna trianglarna symmetriskt i förhållande till sidans mittpunkt äro dessa trianglars areor lika.

II.

Vi vilja nu i stället tänka oss triangeln $A'B'C'$ (fig. 1) given och uppfatta ABC som en kring denna omskriven variabel triangel. Man kan då erhålla ett uttryck för $T:T'$, varur Cevas transversalsats framgår som specialfall för $T=o$, d. v. s. då ABC reducerar sig till en punkt.[1]

Det gäller då först att fixera läget av BC, CA, AB i förhållande till $A'B'C'$. Detta sker enkelt med hjälp av skärningspunkterna $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ mellan BC och $B'C'$, CA och $C'A'$, AB och $A'B'$ resp. (endast $\bar{A}$ är intecknad i fig. 1). För att fastställa läget av dessa punkter införa vi åter omloppsriktningen $A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow A'$. Då är $\bar{A}$ entydigt karaktäriserad av $l' = B'\bar{A} : C'\bar{A}$, om dessutom stipuleras att l' skall vara positivt, då $\bar{A}$ ligger på $B'C'$, men negativt, då $\bar{A}$ faller på denna sidas förlängningar. Genvm cyklisk permutation får man de motsvarande talen $m' = C'\bar{B} : A'\bar{B}$ och $n' = A'\bar{C} : B'\bar{C}$ för $\bar{B}$, $\bar{C}$ resp. med motsvarande teckenföreskrift.

För att nu kunna uttrycka

$$\frac{T}{T'} = \frac{(l+1)(m+1)(n+1)}{lmn+1} \quad \text{(enl. 3)}$$

i l', m', n' är det nödvändigt att söka samband mellan dessa sex tal. Låt oss därför först i fig. 1 betrakta $B\bar{C}\bar{A}$ som transversal till triangeln $AB'C'$. Om vi införa omloppsriktningen $A \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow A$ i denna triangel, bestämmas $\bar{A}$, B, C av följande tal

$$\bar{A}: l',\ B: -\frac{\nu_2}{\nu_1+\nu_2} = -\frac{1}{1+n},\ C: -\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1} = -\frac{m+1}{m}.$$

[1] A, B, C kunna ej ligga i rät linje då $A'B'C'$ är en egentlig triangel.

Enligt Menelaos' sats sats (4) är alltså

$$l' \cdot \left(-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(-\frac{m+1}{m}\right) = -1$$

eller $$l' = -m \cdot \frac{n+1}{m+1}.$$

Genom cyklisk permutation erhålles därur

$$m' = -n \cdot \frac{l+1}{n+1}$$

och $$n' = -l \cdot \frac{m+1}{l+1}.$$

Den första av dessa ekv. är härledd med stöd av fig. 1, men läsaren kan genom att låta B' eller C' eller bägge falla på förlängningarna av AB och AC lätt övertyga sig om att den är allmängiltig Detta följer för övrigt ur en allmän princip som jag ej här kan ingå på.

Ur dessa ekv. följer nu först genom multiplikation av korresponderande membra

$$l'm'n' = -lmn \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Vidare har man

$$n'l' + n' + 1 = lm \cdot \frac{n+1}{l+1} - l \cdot \frac{m+1}{l+1} + \frac{l+1}{l+1} = \frac{lmn+1}{l+1}$$

och genom cyklisk permutation därur

$$l'm' + l' + 1 = \frac{lmn+1}{m+1}$$

samt $$m'n' + m' + 1 = \frac{lmn+1}{m+1}.$$

Man behöver nu endast multiplicera och använda (5) för att få

$$\frac{T}{T'} = \frac{(l'm'n'-1)^2}{(l'm'+l'+1)(m'n'+m'+1)(n'l'+n'+1)} \quad . \quad . \quad (6)$$

vilket är den sökta formeln.

Denna är lika allmängiltig som (3). Högra membrum är positivt, ifall omloppsriktningarne $A \rightarrow B \rightarrow C$ och

$A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ äro desamma eljes negativt. Vid kontinuerlig ändring av l', m', n' kan en ändring i detta membrums tecken endast inträffa då en av nämnarens faktorer försvinner. Då är T oändligt stor. Detta åter är möjligt endast, om två av linjerna $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $C\bar{C}$ äro parallella. Man ser också geometriskt, att omloppsriktningen $A \rightarrow B \rightarrow C$ då verkligen kastat om.

T kan försvinna endast, om $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $C\bar{C}$ gå genom samma punkt.

Villkoret härför blir alltså $lmn = -1$, *vilket är Cevas transversalsats.* Av en figur ser man, att ingen ändring i omloppsriktningen $A \rightarrow B \rightarrow C$ inträder vid kontinuerlig passage genom ett dylikt läge. I överensstämmelse därmed uppträder en jämn potens av $l'm'n' - 1$ som faktor i (6). Högra membrum i (6) blir naturligtvis oförändrat om l', m', n' ersättes med $\frac{1}{l'}$, $\frac{1}{n'}$, $\frac{1}{m'}$,[1] ty detta innebär endast

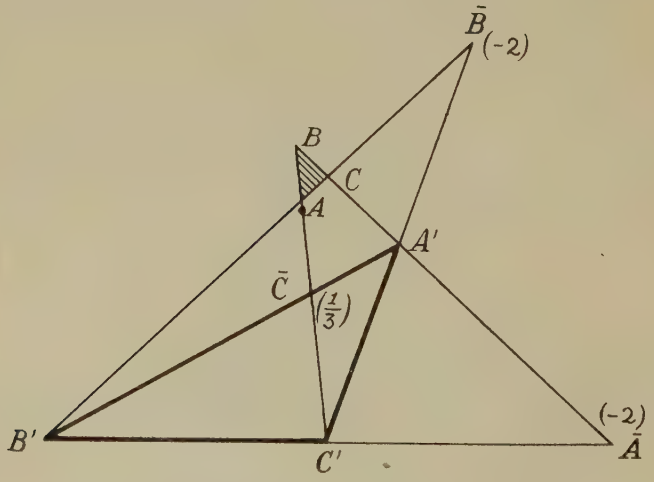


Fig. 2.

[1] Eller med $\frac{1}{n'}$, $\frac{1}{m'}$, $\frac{1}{l'}$ eller $\frac{1}{m'}$, $\frac{1}{l'}$, $\frac{1}{n'}$ resp. Däremot ändras uttrycket i allmänhet, om l', m', n' utbytas mot $\frac{1}{l'}$, $\frac{1}{m'}$, $\frac{1}{n'}$ resp. Här gäller därför ej någon sats analog med den sista i avd. I.

att $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ ersättes med $A' \rightarrow C' \rightarrow B'$ och detta kan ej inverka på $T : T'$. Samma uttryck kan slutligen sägas vara den enklaste funktion av l', m', n', som försvinner utan teckenändring, då de tillhörande linjerna $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $C\bar{C}$ gå genom samma punkt, och blir oändligt stor med teckenändring, då två av dessa linjer passera ett läge, i vilket de äro parallella.

Ex. (fig. 2): $l' = m' = -2$, $n' = \frac{1}{3}$. $\frac{T}{T'} = -\frac{1}{30}$.

III.

I det följande hava vi nytta av en från projektiva geometrien lånad sats, som vi för vårt speciella syfte formulera så:

Punkten P rör sig på linjen p och punkten $\bar{P}$ på linjen $\bar{p}$ så, att linjen $P\bar{P}$ ständigt går genom en fix punkt R. Om P:s läge på p fixeras av talet $l = \frac{AP}{BP}$, där A och B äro två fixa punkter och AP räknas positiv i riktn. $A \rightarrow B$, BP positiv i riktn. $B \rightarrow A$, och $\bar{P}$:s läge på analogt sätt av talet $\bar{l} = \frac{\bar{A}\bar{P}}{\bar{B}\bar{P}}$, gäller alltid mellan l och $\bar{l}$ en relation av formen $\alpha l\bar{l} + \beta l + \gamma\bar{l} + \delta = o$, där $\alpha, \ldots, \delta$ äro oberoende av l och $\bar{l}$. Detta följer egentligen därur, att mot varje P svarar ett $\bar{P}$ och omvänt, medan l och $\bar{l}$ entydigt bestämma P resp. $\bar{P}$. Vi kunna även enkelt bevisa satsen analytiskt. Skära först p och $\bar{p}$ varandra kunna vi välja p till x- och $\bar{p}$ till y-axel i ett parallellkoordinatsystem. Låt koordinaterna för A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$ vara (a, o), (b, o), $(o, \bar{a})$, $(o, \bar{b})$. Då är $l = \frac{x - a}{b - x}$, $\bar{l} = \frac{y - \bar{a}}{b - y}$, om P har koord. (x, o) och P koord. (o, y). Ligger vidare R i (x_o, y_o), gäller $\frac{x_o}{x} + \frac{y_o}{y} = 1$.

Uttryckas nu x och y i l, $\bar{l}$ resp., får man tydligen en relation av påstått slag.

Vore linjerna p och $\bar{p}$ parallella, har man $\frac{PP_1}{\overline{PP_1}}=k$, om P_1, $\bar{P}_1$ äro ett speciellt läge (i rät linje med R) för P och $\bar{P}$ och likaledes $\frac{PP_2}{\overline{PP_2}}=k$, om P_2, $\bar{P}_2$ är ett annat speciellt läge. För $A=P_1$, $B=P_2$, $\bar{A}=\bar{P}_1$, $B=\bar{P}_2$ blir relationen helt enkelt $l-\bar{l}=o$. Vid övergången till andra basispunkter ersättes l med ett uttryck av formen $\frac{sl+t}{ul+v}$ och på samma sätt $\bar{l}$. Det är tydligt, att relationen $l-\bar{l}=o$ därigenom övergår i en annan av ovannämnd typ.

Två trianglar ABC och $A'B'C'$ sägas ligga perspektiviskt, om beteckningen kan väljas så, att linjerna AA', BB', CC' råkas i samma punkt. Vi betrakta nu tre trianglar ABC, $A'B'C'$ och $A''B''C''$ med sidorna a, ..., a', ..., a'', b'', c'', och vilka vi förutsätta:

1. $A'B'C'$ är inskriven i ABC så, att A' ligger på a (eller dess förlängning), B' på b, C' på c.

2. $A''B''C''$ är inskriven i $A'B'C'$ på analogt sätt.

Den sats vi vilja bevisa lyder då:

Om de tre linjerna i var och en av tvänne bland grupperna AA', BB', CC'; $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$; AA'', BB'', CC'' råkas i samma punkt, gäller detta även för den tredje gruppens linjer eller med andra ord, om en av de tre trianglarna ligger perspektiviskt med de bägge andra, så att likbenämnda hörn motsvara varandra, ligga dessa bägge sistnämnda trianglar även perspektiviskt.

Vårt bevis stödja vi på Cevas och Menelaos' satser och fastlägga därför punkterna A', B', C' på a, b, c resp. medels talen λ_1, ..., ν_2 och punkterna A'', B'', C'' på a', b', c' resp. medels talen λ_1', ..., ν_2' i överensstämmelse med beteckningarna i föreg. avd. och såsom fig. 3 anger. Om AA'', BB'', CC'' skära a, b, c i $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ införa vi även de

mot dessa punkter svarande talen $\bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_2$. Vi sätta $l = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \ldots, l' = \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'}, \ldots, \bar{l} = \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} \ldots$

Enligt Cevas sats äro då

ABC och $A'B'C'$ persp., om och endast om $lmn = 1$,

$A'B'C'$ » $A''B''C''$ » , » » » » $l'm'n' = 1$

samt $A''B''C''$ » ABC » , » » » » $\bar{l}\bar{m}\bar{n} = 1$,

varvid likbenämnda hörn skola förenas.

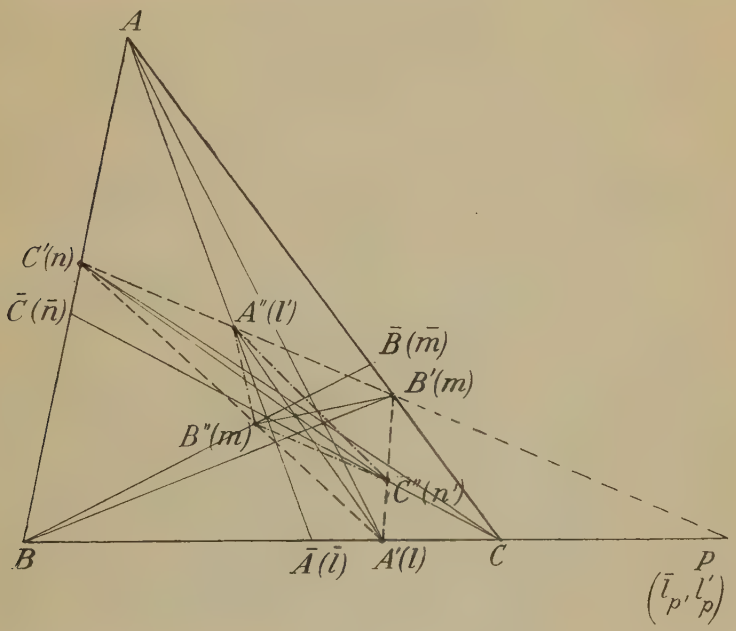


Fig. 3.

Det gäller att finna samband mellan de 9 talen $l, \ldots, n$. Vi skola finna, att de uppfylla det enkla villkoret

$$lmn \cdot l'm'n' \cdot \bar{l}\bar{m}\bar{n} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

och därur följer tydligen vår sats omedelbart. Vi söka först ett samband mellan $\bar{l}$ och l' och behålla för överskådlighets

skull i vår figur endast triangeln ABC, sidan $B'C'$ och linjen $AA''\bar{A}$ (fig. 4). $\bar{A}$ fixeras på BC av $\bar{l}$, A'' på $B'C'$ av l'. Rasispunterna i förra fallet äro B och C, i senare fallet B', C'. Hur linjen $AA''\bar{A}$ än varierar, medan fig. i övrigt är oförändrad, finnes enligt den nyss bevisade hjälpsatsen alltid mellan $\bar{l}$ och l' en relation

$$\alpha\bar{l}l'+\beta\bar{l}+\gamma l'+\delta=o,$$

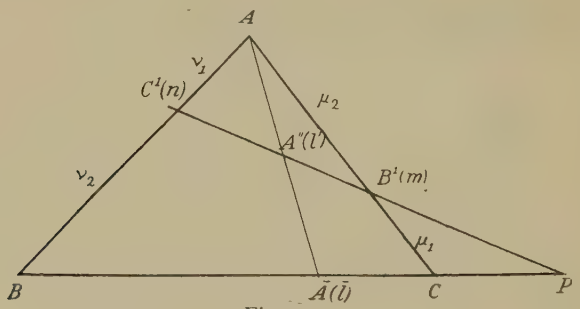


Fig. 4.

där $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ äro oberoende av $\bar{l}$ och l'. För bestämmandet av dessa förhållanden låta vi linjen $AA''\bar{A}$ intaga tre speciella lägen ej bekymrande oss om, huruvida figuren i varje fall kan kompletteras till den ursprungliga formen med egentliga trianglar $A'B'C'$ och $A''B''C''$ eller ej. Om först $B'C'$ ej är $\parallel BC$ antaga vi dessa linjers skärningspunkt vara P. Om $AA''\bar{A}$ sammanfaller med AB blir $\bar{l}=o$ och $l'=\infty$. $\alpha\bar{l}+\frac{\beta\bar{l}}{l'}+\gamma+\frac{\delta}{l'}=o$ skall gälla för dessa värden; därav $\gamma=o$. Sammanfaller $AA''\bar{A}$ med AC, blir $\bar{l}=\infty$ och $l'=o$. Därav följer, att även $\beta=o$. Vår relation är alltså av formen $\bar{l}l'=k$. För att bestämma k låta vi $AA''\bar{A}$ gå genom P, då A'' och $\bar{A}$ bägge falla i P. Tillhörande $\bar{l}$ och l' vare $\bar{l}_P$, l'_P resp. Nu är $C'B'P$ en transversal till triangeln ABC. De mot skärningspunkterna svarande talen äro n, m, $\bar{l}_P$. Alltså är enl. Menelaos' sats

$$\bar{l}_P\cdot m\cdot n=-1 \text{ eller } \bar{l}_P=-\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\frac{\nu_2}{\nu_1} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Vidare är BCP en transversal till triangeln $AB'C'$. De mot skärningspunkterna $B'C'P$ svarande talen på denna triangel äro med $A \rightarrow B' \rightarrow C'$ som första omloppsriktning tydligen för P: l'_P, för B: $\frac{-\nu_2}{c}$ och för C: $\frac{b}{-\mu_1}$. Som nyss får man därur

$$l'_P \cdot \frac{-\nu_2}{c} \cdot \frac{b}{-\mu_1} = -1 \text{ eller } l'_P = -\frac{\mu_1}{\nu_2} \cdot \frac{c}{b} \quad \ldots \quad (9)$$

Alltså är enl. (8), (9)

$$\overline{l_P} \cdot l'_P = \frac{\mu_2}{\nu_1} \cdot \frac{c}{b} = k$$

och allmänt

$$l \cdot l' = \frac{\mu_2}{\nu_1} \cdot \frac{c}{b} \quad \ldots \quad (10)$$

Är $B'C' \parallel BC$, ser man genast, att $ll' = 1$, men då är $\frac{\mu_2}{\nu_1} = \frac{b}{c}$, vadan formeln gäller även i detta fall. Genom cylisk permutation erhållas de analoga likheterna

$$\overline{mm'} = \frac{\nu_2}{\lambda_1} \cdot \frac{a}{c},$$

$$\overline{mm'} = \frac{\lambda_2}{\mu_1} \cdot \frac{b}{a}$$

och slutligen genom multiplikation ur de tre sista likheterna den påstådda likheten (7).

Man kan med anlitande av den s. k. Carnotska satsen draga några andra slutsatser ur likheten (7) till vilka jag kanske får tillfälle återkomma.

Derivatan a^x och ${}^a\log x$.

Av AD. MEYER.

Icke blott i de för de allmänna läroverken avsedda läroböckerna, utan ofta även i de för universitetsstudier avsedda, ser man deduktionerna för ovanstående derivator mycket bristfälligt behandlade. Emellertid är det möjligt att med uteslutande elementära hjälpmedel giva eu fullt exakt härledning därav, en metod som jag stundom begagnat i 4:e ringen på reallinjen.

Visserligen är det sant, att lärjungarna i allmänhet icke så mycket fästa sig vid bevisens stringens, utan gärna på lärarens auktoritet hålla tillgodo även med ganska bristfälliga sådana, men för de bästa och skarpsinnigaste bland dem, och framför allt för läraren själv, är det dock av vikt att hava ett verkligt exakt bevis. Jag vill därför här söka att visa en sådan lärogång.

Såsom förut kända förutsätter jag satserna, att $\lim(A+B)=\lim A+\lim B$ och $\lim(AB)=\lim A\cdot\lim B$, — vilka satser dock naturligen aldrig få utsträckas till ett oändligt antal termer eller faktorer[1] — samt $\lim f(A)=f(\lim A)$, då f är en kontinuerlig funktion.

Vidare fordras kännedom om binomialteoremet för hela, positiva exponenter.

Den ifrågavarande lärogången blir då följande:

Sats 1. Serien $1+\frac{1}{\underline{1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots$ *konvergerar.*

Ty $1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=$

$=1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$

[1] Häruti fela de flesta av de nämnda bevisen.

Denna serie har således ett fullt bestämt värde, som benämnes e och lätt kan uträknas med vilken grad av noggrannhet man önskar. Detta sker t. ex. genom följande addition, där varje term fås genom att dividera den föregående med resp. 1, 2, 3, 4 . . .

$$\begin{array}{l} 1{,}0000000\ldots \\ 1{,}0000000\ldots \\ 0{,}5000000\ldots \\ 0{,}1666666\ldots \\ 0{,}0416666\ldots \\ 0{,}0083333\ldots \\ 0{,}0013888\ldots \\ 0{,}0001984\ldots \\ 0{,}0000248\ldots \\ 0{,}0000027\ldots \\ 0{,}0000002\ldots \\ \hline 2{,}7182281\ldots \end{array}$$

Sats 2. $\lim\limits_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Bevis: *a) x ett positivt helt tal.* Då är

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1+\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{x}+\frac{x(x-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{1}{x^3}+\ldots+$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n-1)}{\underline{|n}}\cdot\frac{1}{x^n}+\ldots+$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-x-1)}{x}\cdot\frac{1}{x^x}=$$

$$=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\underline{|3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{\underline{|n}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{x}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{\underline{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{x}\right).$$

Men då alla i detta uttryck förekommande parenteser äro <1, så förstoras uttrycket om dessa strykas, och vi hava $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{1}{x}$,

och således $\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqq e$.

Å andra sidan måste för varje $n<x$ uttrycket förminskas, om serien avbrytes vid den $(n+1)$:sta termen, och vi få således:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>1+1+\frac{1}{\underline{|2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\underline{|3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\underline{|n}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{x}\right).$$

Men då här alla parenteserna äro $\geqq 1-\frac{n-1}{x}$, så måste uttrycket ytterligare förminskas om vi ersätta dem alla med $1-\frac{n-1}{x}$, och än mer om vi i varje term ersätta parentesuttrycket med $\left(1-\frac{n-1}{x}\right)^{n-1}$.

Vi få således

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1-\frac{n-1}{x}\right)^{n-1}\left(1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{1}{\underline{|n}}\right)=$$
$$=\left(1-\frac{n-1}{x}\right)^{n-1}(e-\delta),\qquad \text{där}$$

$$\delta=\frac{1}{\underline{|n+1}}+\frac{1}{\underline{|n+2}}+\ldots+\frac{1}{\underline{|x}}<\frac{1}{\underline{|n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{2}{\underline{|n+1}}.$$

Men $\lim_{x=\infty}\left(1-\frac{n-1}{x}\right)^{n-1}=1$. Vi få således

$$e\geqq\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\geqq(e-\delta),$$

men då δ kan fås hur litet som helst genom att taga n tillräckligt stort, är således $\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

b) x ett positivt bråk eller irrationellt tal.

Sättes då $x = y+\alpha = y+1-\beta$, så fås

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{y+\alpha}\right)^{y+\alpha} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y+\alpha}\right)^y \cdot \left(1+\frac{1}{y+\alpha}\right)^\alpha < \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \left(1+\frac{1}{y+\alpha}\right)^\alpha,$$

och

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{y+1-\beta}\right)^{y+1-\beta} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y+1-\beta}\right)^{y+1} \cdot \left(1+\frac{1}{y+1-\beta}\right)^{-\beta} > \left(1+\frac{1}{y+1}\right)^{y+1} \left(1+\frac{1}{y+1-\beta}\right)^{-\beta}.$$

Men dessa båda värden hava till limes e,

sål. $\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

c) x ett negativt tal.

Sättes då $x = -(y+1)$, så fås

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \left(\frac{y}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \cdot \left(1+\frac{1}{y}\right).$$

Således även i detta fall $\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Sats 3. $\lim_{\delta=0}(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e$.

Fås omedelbart ur föregående genom att sätta $\frac{1}{x} = \delta$.

Sats 4. $\lim_{\delta=0}\frac{{}^a\log(1+\delta)}{\delta} = {}^a\log e$.

Ty $\frac{{}^a\log(1+\delta)}{\delta} = {}^a\log(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$, således $\lim_{\delta=0}\frac{{}^a\log(1+\delta)}{\delta} =$

$= {}^a\log e$.

Sats 5. $\lim\limits_{\delta=0} \dfrac{a^\delta - 1}{\delta} = {}^e\log a.$

Ty sättes $a^\delta - 1 = \varepsilon$, så fås $\delta = {}^a\log(1+\varepsilon)$,

således $$\frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{\varepsilon}{{}^a\log(1+\varepsilon)},$$

således $$\lim_{\delta=0} \frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{1}{{}^a\log e} = {}^e\log a.$$

Sats 6. $\dfrac{d}{dx} a^x = a^x \cdot {}^e\log a.$

Ty $$\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{\delta=0} \frac{a^{x+\delta} - a^x}{\delta} = \lim_{\delta=0} a^x \cdot \frac{a^\delta - 1}{\delta} = a^x \cdot {}^e\log a.$$

Sats 7. $\dfrac{d}{dx} {}^a\log x = \dfrac{1}{x} \cdot {}^a\log e.$

Ty sättes $y = {}^a\log x$, så fås $x = a^y$,

således $$1 = a^y \, {}^e\log a \cdot \frac{dy}{dx},$$

således $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \, {}^e\log a} = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log e.$$

Anm. Denna sista sats kan även direkt bevisas sålunda:

$$\frac{d}{dx} {}^a\log x = \lim_{\delta=0} \frac{{}^a\log(x+\delta) - {}^a\log x}{\delta} = \lim_{\delta=0} \frac{{}^a\log\left(1+\frac{\delta}{x}\right)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta=0} \left\{ {}^a\log \left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\frac{1}{\delta}} \right\} = \lim_{\delta=0} \left\{ {}^a\log \left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\frac{1}{\delta/x} \cdot \frac{1}{x}} \right\} =$$

$$= {}^a\log \left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log e.$$

Solarkonstantens variationer.

Av ANDERS ÅNGSTRÖM.

Få frågor inom astrofysik och meteorologi äro av en så fundamental betydelse som frågan om solstrålningens beständighet eller föränderlighet. Så beroende äro vi av det klimat, som omger oss i fråga om nästan alla våra funktioner, att ett studium och en iakttagelse av den viktigaste faktorn, på vilken detta klimat beror, måste vara av den allra största betydelse, icke blott för att finna en orsak till ännu oförklarade variationer i det klimat, som är och har varit, utan i än högre grad, för att ge oss möjlighet att förutse de klimatiska öden mot vilka vi gå.

I en föregående uppsats i denna tidskrift[1] har jag sökt visa, att de invändningar, som på senare tid framställts mot uppfattningen att solen är en variabel stjärna, måste anses i huvudsak ogrundade. Som exempel på de av dr Abbot erhållna variationerna i solarkonstanten får jag hänvisa till vidstående fig. 1, där variationerna under juni—november 1911 äro grafiskt åskådliggjorda.

Äro då dessa variationer alltid reella? Härpå måste man svara att antalet felkällor, som inverka på resultatet, visserligen är ganska stort. Små förändringar i atmosfärens genomskinlighet under observationsseriens gång, kunna som vi sett, inverka fullkomligt vilseledande på resultatet. Denna felkälla kan någon gång ha inverkat även på Abbots värden, ehuru, som vi förut visat, i mycket obetydlig grad. Men härtill komma en mängd andra möjligheter till felaktigheter, såsom okontrollerbara ändringar i mätinstrumentens, särskilt bolometerns, känslighet, ändringar i spektrometerspeglarnas reflexionsförmåga med temperatur och fuktighet o. s. v. Alla dessa inflytelser göra,

[1] Årg. 5, sid. 78.

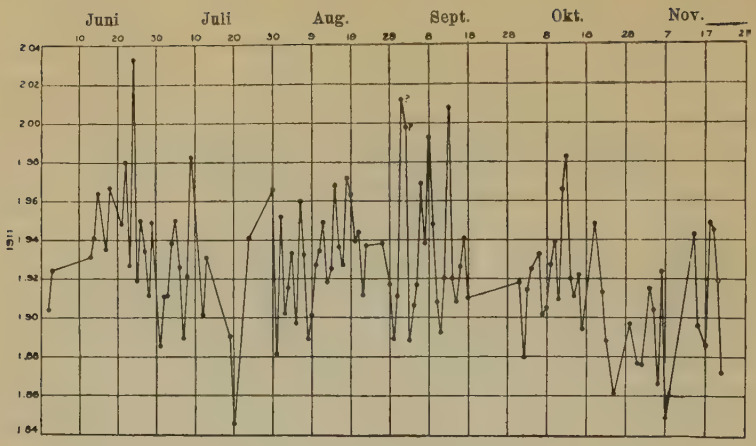


Fig. 1, Mount Wilson solarkonstantvärden 1911.

att om vi också ställa oss på den ståndpunkten, att de påvisade variationerna i huvudsak svara mot en verklig variation i solens egen strålning, vi dock måste medge, att de till vissa delar kunna och måste härröra från tillfälliga eller temporärt systematiska fel hos mätinstrumenten och ofullständigheter i observatörens iakttagelseförmåga.

Det är därför av stort intresse för frågan om variationernas egen realitet, att spörja huruvida dessa variationer i solarkonstanten kunna ställas i samband med andra iakttagbara fenomen på solens yta, och om så är fallet, på vilket sätt sambandet kan formuleras.

Redan tidigt ansåg sig d:r Abbot kunna uppställa den satsen, att ett högt värde på solarkonstanten svarar mot ett stort solfläckstal enligt Wolf-Wolfer och vice versa. Det material, som då stod till hans förfogande, utgjordes blott av ganska få års observationer (1905—1912), och sträckte sig alltså icke över en hel solfläcksperiod, 11 år. Det av honom antydda sambandet måste därför vid denna tidpunkt betecknas som ganska osäkert, i synnerhet som sambandet framträdde mycket otydligt i de individuella dagarnas mätningar och gjorde sig märkbart gällande blott om man tog i betraktande medelvärden för en längre tid.

Genom d:r Abbots tillmötesgående har jag fått tillfälle att taga del av det synnerligen rikhaltiga, ännu icke publicerade observationsmaterial, som sedermera insamlats under åren 1912—1917. Ur detta material har jag beräknat de årliga medelvärdena på solarkonstanten och sammanställt dem med medelvärdena av solfläckstalen under de tider till vilka solarkonstantbestämningarna hänföra sig. Resultatet av denna sammanställning är grafiskt åskådliggjort i fig. 2. Det är redan av denna figur påtagligt att ett mycket intimt samband förefinnes mellan de tvenne sammanställda fenomenen. Ett högt solfläckstal svarar mot ett högt värde på solarkonstanten och vice versa. Sambandet är emellertid icke linjärt: jag finner att det bäst uttryckes genom en formel av detta utseende:

$$S = 1{,}903 + 0{,}0055\sqrt{N}\,^{1},$$

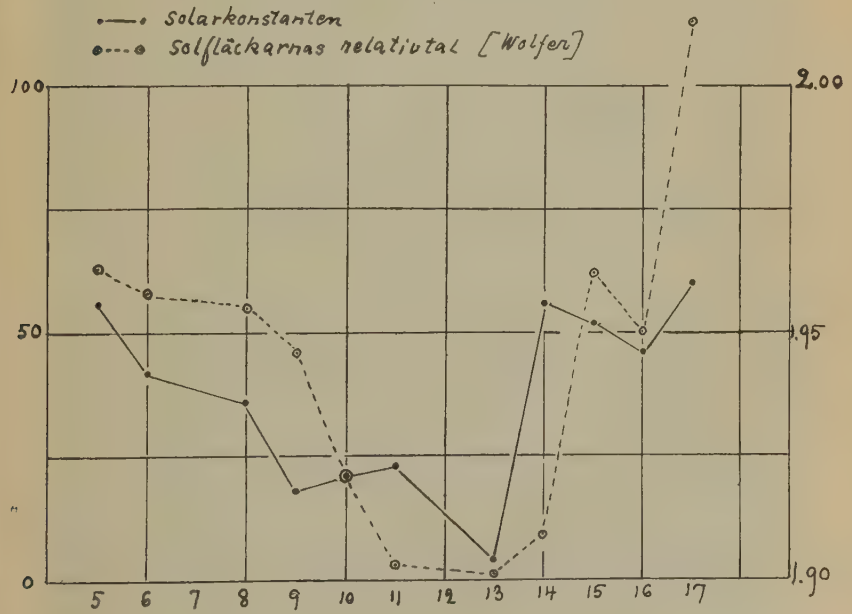


Fig. 2.

[1] Se A. Ångström: Recent investigations regarding the solar constant and some remarks to the same. Geogr. annaler H. 1/3 1920.

där S är solarkonstanten och N solfläckstalet. Denna formel uttrycker, att *storleken av solarkonstantens variationer förhålla sig som kvadratroten ur solfläckstalen.* Vi skola emellertid strax se att detta samband sannolikt blott gäller för ett specialfall och att den generella lag, som förbinder de båda fenomenen, är något mera komplicerad. Innan jag ingår på huru denna lag kan härledas, skall jag dock först i korthet redogöra för några resultat, som man kommit till angående solfläckarnas natur och solatmosfärens konstitution.

Vad som i fråga om solfläckarna i första rummet faller i ögonen är ju att de äro mörkare än den övriga solskivan. När någon av de större solfläckarna visar sig, kan detta lätt iakttagas av en observatör blott utrustad med ett sotat glas. Enligt fransmännen Liais samt Gouy och Thollon är ljusstyrkan av fläckens kärna blott omkring $\frac{1}{10}$ av den övriga solytans ljusstyrka och beträffande den totala värmestrålningen från en ytenhet av fläckens kärna, anger Langley den att vara omkring hälften av samma strålning från en ytenhet av kringliggande delar av solskivan. Då stundom fläckar visa sig, vilkas yta uppgår till nära 1 % av solskivan, skulle man vänta, att detta borde visa sig i en märkbar nedsättning även i den totala strålningen från solskivan, d. v. s. i solarkonstanten. Med stöd av Abbots solarkonstantvärden ha vi emellertid tvärt om funnit, att ett stort solfläckstal svarar mot en hög solarkonstant och vice versa. Det är ju tydligt, att denna ökning i strålningen icke kan härröra från de av fläckarna upptagna delarna av solskivan, utan att den måste ha sitt ursprung i ett fenomen, som beledsagar fläckarna, är intimt knutet till deras förekomst, och som upphäver och fullkomligt överskyler deras nedsättande inverkan på solstrålningen.

Vi skola nu taga i betraktande en del av de fotografiska bilder av solskivan, som på senare tid i stor utsträckning upptagits, särskilt av Deslandres i Meudon och å Mount Wilsonobservatoriet i Kalifornien, och se huruvida dessa kunna ge oss någon antydan om var vi ha att söka förkla-

ringen till förändringarna i solens strålning. Fig. 3 a visar en fotografi tagen av Hale och Ellermann på Mount Wilson. Det ljus, som varit verksamt vid den fotografiska bildens uppkomst hänför sig blott till Kalciumlinjen H_2 ($\lambda = 3\,969$ Å.E.). Alla andra våglängder äro uteslutna genom särskilda försiktighetsmått. Av figuren framgår synnerligen tydligt, att varje fläck är omgiven av en bred ringformad area av större ljusstyrka än övriga närliggande delar av solskivan. Detta gäller naturligtvis i främsta rummet blott om den våglängd, varom här är fråga, men även för en stor del andra linjer, som särskilt starkt framträda i de s. k. Flocculispektra, måste samma förhållande råda. Mot varje fläck

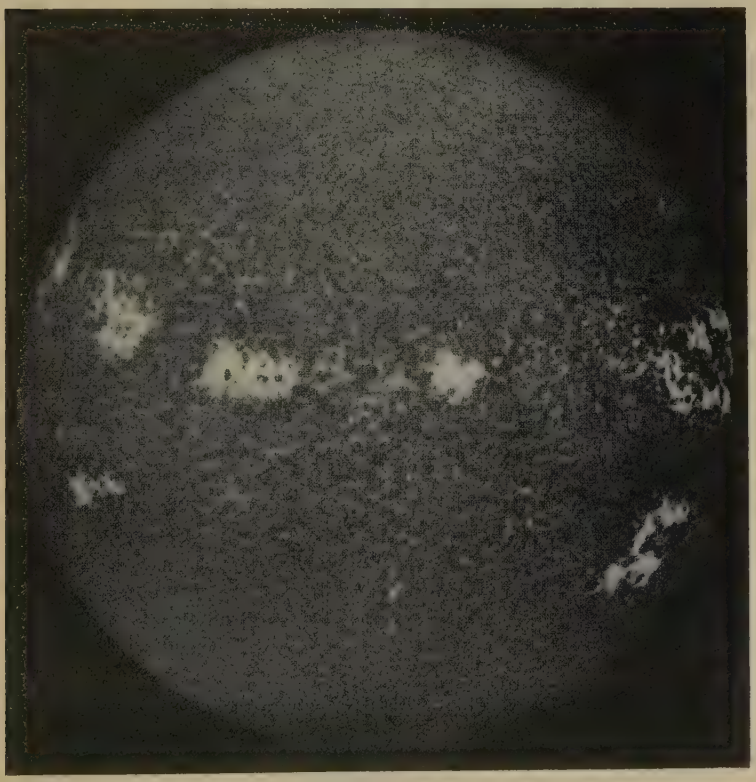


Fig. 3 a.

Fig. 3 b. Solfläck efter teckning av Secchi.

svarar alltså i allmänhet en kringliggande area, vars ljusstyrka inom vissa spektralgebit är betydligt starkare än den övriga solskivans. Att den ökning, som den totala solstrålningen undergår, sannolikt har sitt säte i dessa periferiska områden av solfläckarna, skall jag nu söka visa. Först må det emellertid framhållas, att just för det spektralområde, till vilket den i fig. 3 a angivna fotografiska bilden hänför sig, solarkonstanten enligt Abbots mätningar undergår en särskilt stark ändring. (Annals of the Astrophysical Observatory of Smithsonian Institution II, pag. 132.)

Vad solfläckstalet beträffar, är dettas angivelse enligt Wolfer egentligen grundat på ganska komplicerade principer, varvid hänsyn tages såväl till fläckarnas antal, som till deras gruppering. Emellertid har man funnit, att detta tal med mycket god tillnärmelse ger ett direkt mått på den av solfläckarna upptagna arean. Det synes då naturligt på grund av vad vi ovan anfört angående solfläckarnas natur, att solarkonstanten bör vara underkastad en minskning som, iakttagbar eller ej, är proportionell mot solfläckstalet. Å andra sidan är den underkastad en ökning, som i genomsnitt bör vara proportionell mot arean av de ljusstarka områden, som omge fläckarna. Tänka vi oss fläckarna som lika stora cirkulära bildningar och de ljusstarka områdena som perifera ringar, så bör den ljusstarka ytan och därmed även ökningen i solarkonstanten vara proportionell mot roten ur solfläckstalen.

Detta senare är nu vad vi faktiskt funnit vara fallet

i fråga om de solarkonstantvärden, som svara mot de förhållandevis låga solfläckstal, vilka uppträda i de årliga medelvärdena. Frågan är nu, huruvida vi även kunna spåra inflytandet av den term, vars verkan går i den riktning att framkalla en minskning i solarkonstanten med en ökning i solfläckstalet. För låga solfläckstal ha vi sett, att ringarnas inflytande, proportionellt mot roten ur solfläckstalet, är förhärskande. Ett inflytande av fläckarna själva i motsatt riktning bör visa sig tydligast vid mycket stora solfläckstal, i det att ju en term proportionell mot själva solfläckstalet bör växa snabbare än den term, som är proportionell mot roten ur detsamma. För att pröva huruvida dessa betraktelser svara mot det verkliga förhållandet har jag nu använt mig av Abbots material från de solfläcksrika åren 1915, 1916 och 1917, under vilka även mycket stora variationer förekomma, i det att solfläckstalet varierat mellan 0 och upp till nära 200. Genom att taga i betraktande ett fåtal år undgå vi inflytandet av mångåriga variationer, vilka eventuellt kunna uppträda.

Resultatet av denna sammanställning framgår av nedanstående tabell och fig. 4. Det synes mig härav otvivelaktigt,

Tabell.

Antal värden (n)	N	S
5	0— 9	1,933
12	10— 19	1,924
17	20— 29	1,945
17	30— 39	1,942
35	40— 59	1,949
33	60— 79	1,953
27	80— 99	1,955
23	100—119	1,956
11	120—139	1,951
10	140—159	1,959
5	160—179	1,966
2	180—199	1,938
3	200—224	1,933
5	225—275	1,935

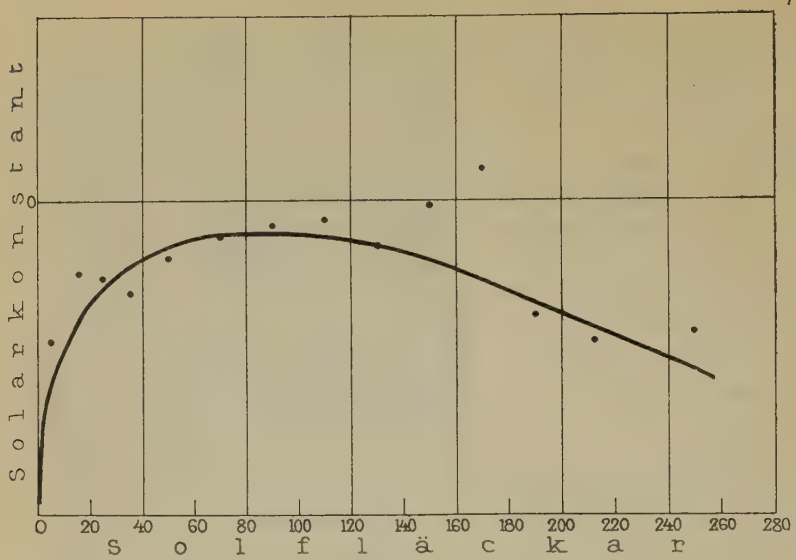


Fig. 4.

att vi verkligen för höga solfläckstal ha att göra med en *minskning i solarkonstanten med en ökning i solfläckstalet*, alltså ett omvänt förhållande mot det, som äger rum vid de låga solfläckstalen. Huru detta förhållande skall förklaras i enlighet med vår kännedom om fenomenen på solens yta har jag förut sökt klargöra. Till en jämförelse med de observerade värdena har i fig. 4 uppdragits en kurva definierad av likheten

$$S = 1{,}903 + k\sqrt{N} - c \cdot N,$$

vilken något så när ansluter sig till de observerade värdena. Ännu är dock det material, som föreligger särskilt vid höga solfläckstal, för litet för att man skall kunna draga fullt bestämda slutsatser angående det matematiska uttryck som bäst lämpar sig att återge det genomsnittliga sambandet.[1] Det synes mig emellertid, att den uppfattning, som jag ovan gjort gällande angående hur vi böra

[1] De frågor som här kommit till behandling har jag nyligen underkastat en granskning i en uppsats: Solar-constant, sun-spots and solar-activity, vilken är under tryckning i Astrophysical Journal.

tänka oss variationerna i solstrålningen lokaliserade på solens yta, fått ett kraftigt stöd av observationsmaterialet. Samtidigt måste man häri se ett ytterligare stöd för den uppfattningen, att *solen är en variabel stjärna* och att de variationer, som beräknas enligt den Langley-Abbotska metoden, åtminstone i sina huvuddrag svara mot reella förändringar i solens strålning.

Stockholm i oktober 1921.

Om ljusets relativa fortplantnings-hastighet.

Av C. A. MEBIUS.

1. I relativitetsteorien och annorstädes förekommer en storhet $\sqrt{V^2 - v^2} = V\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}$, där v och V äro hastigheterna hos en kropp och hos ljuset. I *Einsteins* relativitetsteori uppträder denna storhet första gången, då man beräknar ljusets hastighet, betraktad från ett vilande koordinatsystem, längs en riktning vinkelrät mot det rörliga koordinatsystemets rörelseriktning. Denna hastighet är, säger *Einstein*[1] (s. 899), alltid $\sqrt{V^2 - v^2}$. Till detta resultat kommer man, såsom lätt inses, genom följande tankegång.

2. Från det fixa koordinatsystemets (x, y, z) origo O utgår en ljusvåg, som efter tiden t i xy-planet hunnit till cirkeln i fig. 1. Det rörliga koordinatsystemet (ξ, η, ζ), vars axlar äro parallella med det förras, x- och ξ-axlarna sammanfallande, har under tiden flyttat sig med den konstanta hastigheten v, så att dess origo vid tiden t är i Ω. Vågfronten träffar η-axeln i P. En åskådare i P, som medföljer η-axeln i dess rörelse, och som antager, att ljuset utgått från Ω, vilket var riktigt, då Ω sammanföll med O, antager, att ljuset fortplantat sig vägsträckan ΩP, och då $OP = Vt$,

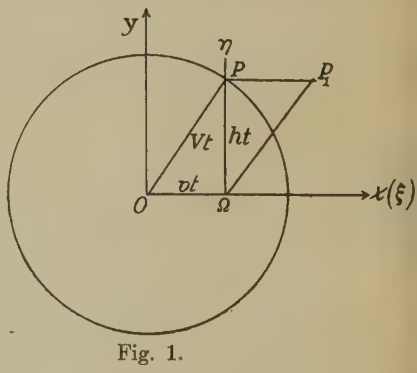


Fig. 1.

[1] *A. Einstein:* Ann. d. Physik, Bd. 17, s. 891. 1905.

$O\Omega = vt$ och således $\Omega P = \sqrt{V^2 - v^2} \cdot t$, med hastigheten $\sqrt{V^2 - v^2} = h$.

Emedan h blir imaginär, om $v > V$, så har man av ovanstående ekv. dragit den slutsatsen, att hastigheter större än ljusets icke kunna förekomma, eller att ljusets hastighet är den största, som kan förekomma i naturen.

Skulle $v > V$, låge punkten Ω utanför cirkeln (vågfronten). Den riktiga slutsats, som kan dragas, är tydligen den, att vågfronten icke träffat η-axeln och aldrig kommer att göra det.

$h = \sqrt{V^2 - v^2}$ är tydligen ljusets relativa hastighet, d. v. s. hastigheten relativt till det rörliga koordinatsystemet i η-axelns riktning. Den är resultanten till en hastighet $\Omega P_1 = V$ parallell med OP och hastigheten $-v$, d. v. s. hastigheten av Ω med ombytt tecken (för $t=1$ i fig. 1).

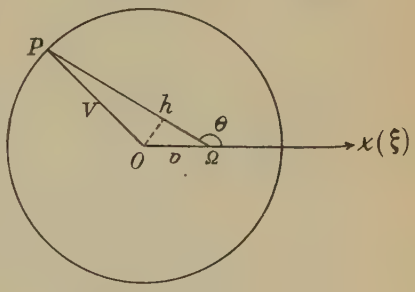


Fig. 2.

3. Vi skola nu beräkna den relativa hastigheten i en riktning, som med riktningen Ox bildar vinkeln θ.

Man har (fig. 2).

$$V^2 = h^2 + v^2 + 2hv\cos\theta,$$

alltså

$$h = -v\cos\theta \pm \sqrt{v^2\cos^2\theta - v^2 + V^2},$$

$$h = -v\cos\theta \pm \sqrt{V^2 - v^2\sin^2\theta}.$$

Här kan tydligen v vara $> V$, utan att h blir imaginär. Då $v > V$, ligger punkten Ω utanför cirkeln såsom i fig. 3. Vi välja först det enklaste fallet, att riktningen ΩP tangerar vågfronten. Då är $h = \sqrt{v^2 - V^2}$. Under det att ΩP flyttar sig parallellt med sig själv, tangeras den alltid av vågfronten, och medan Ω flyttar sig från O till dess läge Ω_t vid tiden t, flyttar sig tangeringspunkten från Ω till P_t, läget av P vid tiden t. Ljuset fortskrider således längs ΩP med hastigheten $\sqrt{v^2 - V^2}$. Drages en rät linje från Ω

inom vinkeln $P\Omega x = \theta_o$, så har denna linje en sådan riktning, att den aldrig träffas av det från O utgående ljuset.

4. Vi draga nu en rät linje från Ω inom vinkeln $P\Omega O$. Denna skär vågfronten i två punkter P_1 och P_2. Är vinkeln $P_1\Omega x = \theta$, så är

$$h_1 = P_1\Omega = -v\cos\theta + \sqrt{V^2 - v^2\sin^2\theta}$$

och

$$h_2 = P_2\Omega = -v\cos\theta - \sqrt{V^2 - v^2\sin^2\theta}.$$

Vid växande t flyttar sig skärningspunkten P_1 mellan vågfronten och den rörliga linjen ΩP_1 i riktning från Ω med hastigheten h_1 och skärningspunkten P_2 från Ω med hastigheten h_2, ehuru P_2 avlägsnar sig från den fixa riktningen (radien) OP åt samma håll som Ω.

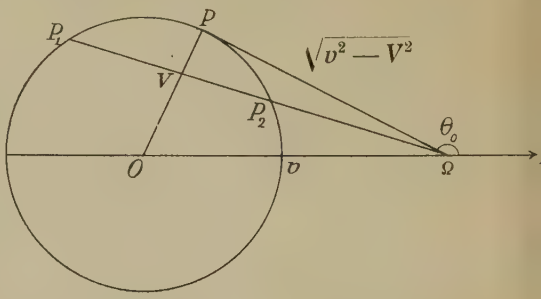


Fig. 3.

För gränsläget $\theta = \theta_o$ är

$$\cos\theta_o = -\sqrt{v^2 - V^2} : v \quad \text{och} \quad \sin\theta_o = V : v,$$

och således övergå föregående värden på h_1 och h_2 till

$$h_1 = h_2 = \sqrt{v^2 - V^2}.$$

För $\theta = 180°$ är $h_1 = v + V$ och $h_2 = v - V$.

5. Vi ha sålunda beräknat ljuset relativa hastighet i olika riktningar, och därav följer, att påståendet, det hastigheter större än ljusets icke kunna förekomma, icke kan grundas därpå, att den relativa hastigheten i en riktning vinkelrät mot den konstanta hastigheten v är $\sqrt{V^2 - v^2}$.

6. Det är icke utan intresse att undersöka, med vilken hastighet vågfronten fortskrider längs en rät linje, som icke någonsin går genom den punkt O, från vilken ljuset utgår. Vi låta denna riktning RP (fig. 4) vara parallell med x-axeln och på avståndet a från densamma. Då ljusfronten

växt till en cirkel med radien a, tangerar den linjen RP i R. Efter t sekunder är radien $a+Vt$, och ljusfronten har fortskridit stycket $RP=x$. Då är $x^2=(a+Vt)^2-a^2$.

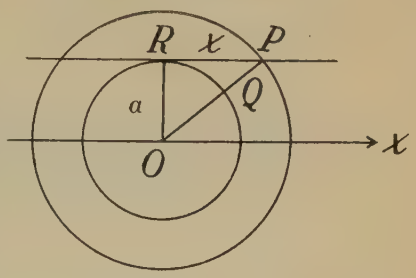


Fig. 4.

RP är alltid större än PQ, vilket innebär, att medelhastigheten för vågfrontens fortskridande längs RP alltid är större än ljusets hastighet. Vi skola beräkna hastigheten och accelerationen i punkten P. Alltså

$$x\frac{dx}{dt}=V(a+Vt) \quad \text{och} \quad x\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=V^2.$$

Således är, då vi fästa oss endast vid positiva x-värden,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{V(a+Vt)}{\sqrt{(a+Vt)^2-a^2}} \quad \text{och} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{a^2V^2}{x^3}.$$

Accelerationen är ständigt negativ, och således minskas hastigheten oupphörligt. För $t=o$ är hastigheten oändligt stor, och för $t=\infty$ är den $=V$, d. v. s., att vågen då är plan.

För $a=\infty$ och ändligt t är $\lim \frac{dx}{dt}=\infty$. Hastigheten är då oändligt stor, vilket innebär, att då vågen är plan, träffas alla punkter på RP samtidigt av vågen.

Låt a vara 1 km och $t=1$ sekund; V är 300 000 km pr sek. Utvecklas enligt binomialteoremet fås

$$x=\sqrt{300\,001^2-1}=300\,001\left(1-\frac{1}{300\,001}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=300\,001-\tfrac{1}{2}=(V+\tfrac{1}{2}) \text{ km}.$$

På liknande sätt fås

$$\frac{dx}{dt}=300\,000\left(1-\frac{1}{300\,001}\right)^{-\frac{1}{2}}=300\,000+\tfrac{1}{2}.$$

Vore $a = 1$ km och $t = \frac{1}{300\,000}$ sekund, erhölle man

$x = \sqrt{3}$ och $\frac{dx}{dt} = 100\,000\sqrt{12} = 346\,410.$

7. Vad i det föregående är sagt om ljuset, gäller naturligen för varje vågrörelse, såsom ljudet eller vattenvågorna på ytan av stillastående vatten. Enda olikheten är vågrörelsens fortplantningshastighet.

Undersökningar över värmegenomgången hos byggnadskonstruktioner.

Av AXEL ERIKSSON.

Problemet angående värmegenomgången hos olika konstruktioner har inom byggnadstekniken blivit särskilt aktuellt genom införandet av centrala uppvärmningssystem.

Det har därigenom blivit nödvändigt utföra beräkningar över värmemeddelningen genom väggar, fönster, tak, golv m. m., vilka konstruktioners beskaffenhet äro avgörande för värmeförbrukningen i en byggnad.

En ytterligare anledning till de värmetekniska frågornas beaktande i detta fall var bränslepriserna stegring under världskriget. Man har beräknat, att ungefär 40 % av hela Sveriges bränsleförbrukning användes för rumsuppvärmning och de belopp, som kunna sparas genom förbättring av t. ex. väggkonstruktionernas värmeisoleringsförmåga, böra därför bli avsevärda.

För bedömande av olika konstruktioners värde och för erhållande av riktlinjer vid konstruerandet av de byggnadsdelar, som skola skydda för värmeförluster, har det därför blivit nödvändigt att göra undersökningar över värmegenomgången hos olika konstruktioner.

De teorier och beräkningsformler, som finnas uppställda, hava nämligen ej visat sig föra till målet, och därjämte äro uppgifterna om de olika konstanterna (ledningstal, övergångstal o. s. v.) mycket sparsamt förekommande inom litteraturen, och de, som finnas, äro ofta felaktiga.

Under senare åren hava en del undersökningar på området utförts över värmegenomgången, speciellt i Tyskland

och Amerika, men även i Sverige och Norge. De metoder, som därvid använts, hava dock i mer eller mindre grad varit indirekta.

Den metod, som i denna uppsats skall beskrivas, möjliggör en direkt uppmätning av värmegenomgången hos ett ytelement.

Utexperimenteringen av metoden påbörjades i november 1920 och densamma har sedan använts för provningar av ett 80-tal olika väggar.

Undersökningarna hava utförts genom en av Ingenjörsvetenskapsakademien tillsatt kommitté bestående av professorerna H. Kreüger, K. Sondén och E. Hubendick, samt civilingeniör H. Theorell. Kommittén har som sekreterare anställt undertecknad, vilken även närmast sysslat med det praktiska utförandet av experiment och provningar.

För undersökningarna har en mindre byggnad uppförts vid Tekn. Högskolan. Kostnaderna hava huvudsakligen bestridits genom användning av en del av de medel, som av Staten beviljats till Ingenjörsvetenskapsakademien för byggnadstekniska undersökningar, men dessutom har en del bidrag erhållits från enskilda. Hittills har för ändamålet förbrukats omkring 60,000 kr.

*

Den viktigaste delen bland anordningarna för undersökningarna är den apparat med vilken den värmemängd mätes, som passerar genom ett visst ytelement hos provväggen. Apparaten, till vilket uppslaget givits av undertecknad, visas schematiskt genom ritning, fig. 1 och fotografi fig. 2.

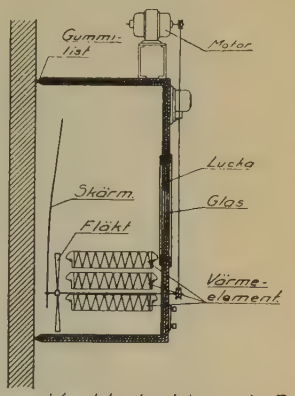
Den består av en låda, sluten på fem sidor och med den sida öppen, som anbringas mot provväggen.

Den ledande principen är härvid den, att lufttemperaturen i lådan hålles lika med lufttemperaturen i rummet utanför densamma, samt att denna temperatur är konstant och lämpligen av vanlig rumstemperatur.

Å andra sidan provväggen hålles en konstant lägre temperatur.

På grund av temperaturskillnaden å ömse sidor om provväggen strömmar värme genom densamma. Däremot kan intet värmeutbyte ske genom själva lådans väggar, då ju temperaturen å ömse sidor om desamma ständigt hållas lika.

Då utrymmet inom lådan uppvärmes genom särskilda elektriska värmeelement, fullt skilda från värmekällan till det yttre varma rummet och då, som nämnts, intet värmeutbyte kan ske genom lådans väggar, måste allt det värme, som alstras inom lådan och som noggrannt uppmätes, passera genom provväggen.



Emedan lådan täcker en viss ytenhet av provväggen, måste den värmemängd, som går genom väggen från lådan, gå just genom denna ytenhet, ty eftersom luft- och yttemperaturen hos väggen är densamma på ömse sidor om lådan, som i densamma, kan ingen ledning uppstå från eller till denna ytenhet. En värmetillströmning i ena eller andra riktningen kan nämligen icke uppstå i detta fall utan att temperaturen ändras å någondera sidan. Allt eftersom väggen har större eller mindre värmeisoleringsförmåga, måste därför mera eller mindre energi tillföras, för att temperaturen i lådan skall hållas lika med rumstemperaturen. *Den värmemängd, som utvecklas i lådan, är således ett mått på värmegenomgången, och därav kan väggens värmeisoleringsförmåga beräknas.*

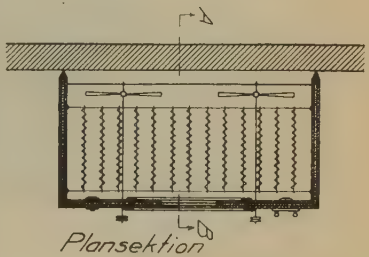


Fig. 1.

Vid de prov, som utförts, har temperaturen å ena sidan

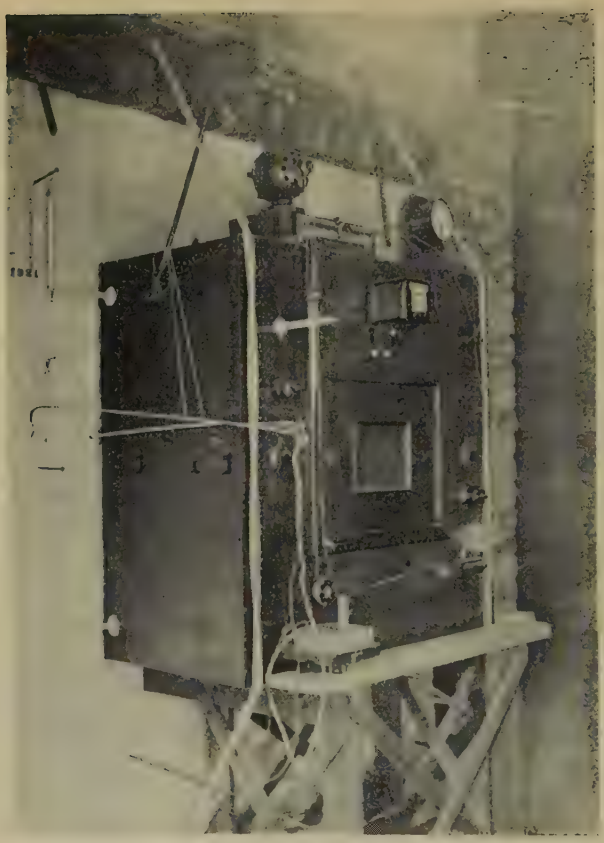


Fig. 2.

om provväggen i regel hållits omkring + 18° och å den andra — 18° C. Värmegenomgången för en viss provvägg har därför varit ganska konstant och motståndsregleringen har kunnat ske för hand. Om lufttemperaturerna skulle vara mera varierande, som t. ex. vid provningar av väggarna hos färdiga hus, då yttre luftens temperatur varierar, och längre tid därför måste tagas i anspråk för provningen, bör automatisk reglering av värmetillförseln lämpligen anordnas.

Lådans väggar bestå av två lag trä (korsfanér), mellan vilka inlagts ett isolerande lag av maskinfilt. Lådans öppna sida täcker 1 m^2 av provväggen, som i de flesta fall är cirka 4 m^2. Lådans djup är 55 cm. Främre sidan är försedd med en lucka, som kan öppnas för att göra lådans inre åtkomligt på bekvämt sätt, då så erfordras. Kanterna mot den öppna sidan ha försetts med profilerad mjuk gummilist för tätning mot provväggen. Härigenom erhålles god tätning även om väggytan skulle vara något ojämn.

I lådan äro placerade elektriska motstånd i seriekoppling. De kunna kopplas så, att strömstyrkan kan regleras från 0,01 till 1,00 ampère med intervall av 0,01 amp. vid 220 volt spänning.

En av de använda apparaterna är konstruerad med dubbelt så stora motstånd och för en strömstyrka av högst 0,5 amp. Härigenom möjliggöres en större noggrannhet vid provning av kraftigt värmeisolerande väggar, där endast obetydlig värmeutveckling är nödvändig.

Seriekoppling för motstånden har valts, för att vid minsta energiutveckling, då största mätningsnoggrannhet erfordras, de flesta motstånden skola vara inkopplade. Därigenom blir nämligen värmeutvecklingen i lådan jämnast fördelad.

De värmeutvecklande motstånden äro placerade i botten av lådan för att åstadkomma självcirkulation. Därjämte äro två fläktar insatta för att öka luftväxlingen.

Cirka 10 cm från lådans öppning, således nära intill provväggen, är en skärm placerad, som är avsedd att dels hindra direkt strålning från värmeelementen till provväggen, dels giva luftens rörelse naturlig riktning utefter väggytan. Luften kommer på detta sätt att sjunka uppifrån skärmens övre del ned mot undre kanten och således erhålles samma luftrörelse, som på innersidan av ett rums yttervägg, vid lägre temperatur utomhus.

I ett rum med en våningshöjd på ytterväggarna av 2,5 à 3 m, erhålles en relativt stor hastighet på luften utefter ytterväggens innersida. På grund av den, i förhål-

lande till ett helt rum, relativt obetydliga volymen i lådan, visade det sig nödvändigt att medels fläktar öka luftrörelsen i lådan för ernående av likhet. Genom att mäta luftens temperatur invid provväggens yta i olika höjdskikt, dels i lådan dels utanför densamma, kan denna likhet kontrolleras.

För uppmätning av den elektriska energiutvecklingen i lådan har under de förberedande försöken använts dels en vanlig wattimmätare dels en ampèremeter. Därjämte har en voltmeter varit insatt för kontrollering av spänningen. Wattimmätaren visade sig dock hava för liten noggrannhet vid små energiförbrukningar, således vid hög isoleringsförmåga å provväggen, varför säkraste värdet på energien erhållits genom att mäta spänning och strömstyrka.

Den elektriska energien har uttagits från Tekn. Högskolans ledningar, som äro anslutna till Stockholms stads elektricitetsverk, med likström om 220 volts spänning. Spänningen har varierat högst obetydligt och vid beräknandet av värmemängderna har räknats med 220 volt, då därigenom ej större fel än högst 1 % torde uppstå.

För kontrollering av att temperaturen inuti lådan är densamma, som temperaturen utanför densamma, har en termometer använts, vilken placerats på en punkt där medeltemperatur rått.

Denna medeltemperatur har bestämts genom placering i lådan av flera termometrar på olika punkter. Därjämte har för kontroll termoelement insatts på olika punkter i lådans väggar, med ena lödpunkten på insidan och den andra på utsidan. Termoelementen ha seriekopplats och något galvanometerutslag får följaktligen ej uppstå då den avlästa medeltemperaturen inuti lådan är lika med temperaturen utanför densamma. Denna anordning medgiver avläsning av temperaturdifferenser av ned till 0,05° C.

Lådornas väggar komma dock att senare förses med anordning för jämförande mätning av medeltemperaturen på in- och utsidan enligt motståndstermometerprin-

cipen. Denna anordning kombineras med grafisk registrering av energiåtgången i lådan samt temperaturen i varmrummet, kylkammaren och å provväggens ytor. Samtidigt som därigenom en effektiv kontroll erhålles på att intet värme passerar genom lådans väggar, registreras grafiskt de värden på energi och temperaturer, som äro behövliga, varigenom arbetet med avläsningar minskas och risken för subjektivitet vid avläsningen bortfaller. Energitillförseln kan därigenom även regleras med ett särskilt regleringsmotstånd utom lådan, varigenom endast ett värmeelement blir behövligt i lådan, som på lämpligt sätt kan utbredas.

Den låga temperaturen å ena sidan om provväggen åstadkommes genom ett kylmaskineri, som kan hålla en temperatur av omkring — 20° C i en särskild kammare. Denna kammare omgives av fyra väggar av vilka tre st. äro utbytbara. I allmänhet provas därför tre väggar samtidigt, och för den skull har tre mätningsapparater för värmegenomgången anskaffats. Rummet omkring kammaren uppvärmes till omkring + 18° C huvudsakligen medels varmvattenelement, men för reglering av temperaturen användes även elektriska värmelement.

Det har vid försökens utförande visat sig gå någorlunda bra att hålla lufttemperaturerna konstanta på några 10-dels grader när, även utan särskilda automatiska regleringsinstrument. För mätningarnas utförande är dock konstanta temperaturer ej absolut nödvändiga, men det underlättar arbetet och möjliggör provningarnas utförande på kortare tid, än vad annars är behövligt för erhållande av säkra medelvärden.

De utförda experimenten och provningarna hava i första hand byggnadstekniskt intresse och den skala inom vilken undersökningarna utföras, samt det system av konstanter man arbetat på att få fram, får därför ses under denna synvinkel.

Många av de utförda försöken torde dock även kunna vara av intresse för fysiker, men det skulle dock taga för

mycket utrymme, att här i detalj ingå på relaterandet av olika försök,[1] varför endast några få i korthet skola omnämnas.

Det bör dock betonas, att byggnadsmaterialierna i allmänhet äro av mycket varierande sammansättning, varför absolut överensstämmande resultat mellan olika provningar ej få påräknas.

Temperaturfördelningen hos luften.

Över temperaturen hos luften i olika punkter inom försökslokalen har en del mätningar företagits. Det har därvid visat sig, att temperaturen i kylkammaren i olika höjdsnitt är konstant på någon 10-dels grad när. Detta är beroende av att kylelementet förlagts i kammarens övre del, varigenom självcirkulation erhållits.

I det större varmrummet däremot stiger temperaturen ungefär med 1° C pr höjdmeter från golvet, beroende på att luften avkyles invid väggarna och sjunker mot golvet. Detta har även sin motsvarighet i vanliga bostadsrum. Allt efter väggarnas isoleringsförmåga varierar naturligtvis dessa temperaturdifferenser.

Det är därför av vikt att temperaturmätningarna företagas i vissa höjdskikt för erhållande av de medelvärden man önskar fastställa. Genom luftens avkylning utefter provväggen blir förhållandet detsamma i mätapparaten (lådan), nämligen att den kalla luften sjunker mot golvet.

Värmelementen hava därför placerats vid lådans botten för åstadkommande av självcirkulation. Det visade sig dock vid de förberedande försöken, att en temperaturdifferens av omkring 6° uppstod mellan lådans botten och tak vid provning av enkel glasruta ($k = 5{,}0$) med omgivande temperatur av $+19°$ och $-19°$. För den skull insattes fläktar, som påskyndade luftomsättningen.

[1] Kommittén har i november till Ingenjörsvetenskapsakademien avlämnat rapport över sin verksamhet med en sammanfattning av de utförda undersökningarna. Dessa finnas nu publicerade i Ingenjörsvetenskapsakademiens Handlingar n:o 7 — H. Kreüger och A Eriksson: Undersökningar rörande byggnadskonstruktioners värmeisoleringsförmåga.

Fläktarnas hastighet regleras så, att temperaturdifferensen mellan olika höjdskikt invid provväggen i lådan blir densamma som i motsvarande läge utanför densamma.

För undersökning av den värmemängd, som kan tänkas alstras i lådan genom fläktarnas rörelse, sattes lådan fritt i varmrummet och lådans öppna sida täcktes med en isolerande skärm. Fläktarna fingo sedan gå med 1 400 varv i min. (300 à 600 normalt vid provning) under 5 timmar. Det visade sig då, att någon med kvicksilvertermometrar (graderade på $^1/_5°$) mätbar temperaturhöjning ej åstadkommits i lådan.

Av detta kan man draga den slutsatsen, att fläktarnas värmeutveckling är så liten, att den ej inverkar på värmemätningsresultaten inom de gränser för noggrannhet, som dessa utföras.

Värmegenomgången hos lådans väggar.

Genom experiment har fastställts, att lådans väggar har ett värmegenomgångstal $k = 1{,}5$.

Lådans sammanlagda väggarea är 3,10 m^2.

Om medeltemperaturen i lådan avviker från medeltemperaturen omkring lådan med $^2/_{10}°$, vilket är den största avvikelse, som kan behöva förekomma vid fortfarighetstillstånd, så passerar $1{,}5 \cdot 3{,}1 \cdot 0{,}2 \simeq 0{,}9$ kal./tim. genom lådans väggar.

Vid provning av en normal vägg, $k = 1{,}0$, och en temperaturdifferens mellan luften å ömse sidor av 36° går 36 kal./tim. genom en m^2 av provväggen.

Det fel, som uppstår genom värmegenomgång hos lådans väggar, motsvarar i ett sådant fall 2,5 %.

Vid provning försöker man dock att hålla temperaturen på ömse sidor om lådan lika och då dessa temperaturer registreras kan korrektionen göras, varför en felbestämning i detta fall av 2,5 % ej kan behöva ifrågakomma.

Beräkningsmetoder.

I nedanstående antages för enkelhetens skull den behandlade konstruktionen vara en vägg och därför användes

beteckningen »väggyta». Denna kan naturligtvis ersättas av bjälklagsyta, fönsteryta etc.

Då inom den tyska litteraturen en hel del beteckningar fastslagits och kommit till stor användning, ha desamma i det följande i möjligaste mån tillämpats.

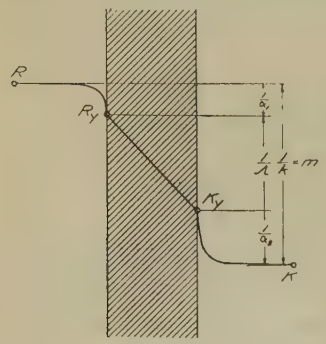
1. *Värmegenomgången* W hos en vägg är den värmemängd, som på viss tid passerar genom väggen, då temperaturskillnad finnes hos luften å ömse sidor om densamma.

2. Värmegenomgången hos en vägg bestämmes av *värmegenomgångstalet* k, som är den värmemängd, som på tidsenheten genomströmmar ytenheten av väggen vid en temperaturskillnad av 1° hos luften å ömse sidor om densamma.

3. *Värmeisoleringsförmågan* hos en vägg är det motstånd väggen erbjuder för värmegenomgång.

4. Värmeisoleringsförmågan bestämmes av *värmemotståndstalet* m, som angives av den tid, som åtgår för värmeenheten att passera ytenheten av väggen vid 1° temperaturskillnad hos luften å ömse sidor.

Det totala värmemotståndet är summan av det motstånd för värmegenomgången, som finnes i väggen. Fig, 3 visar grafiskt ett exempel på temperaturfördelningen i en homogen vägg med temperaturskillnad hos luften å ömse sidor, varvid antagits rätlinig temperaturvariation inuti väggen.



R = Lufttemperaturen på den varmare sidan.
Ry = Ytternperaturen " " " "
Ky = " " " kallare "
K = Lufttemperaturen " " " "

Fig. 3.

Där en temperaturskillnad uppstår finnes ett motstånd för värmeströmning.

I detta fall kan motståndet uppdelas i dels ett motstånd vid värmets

överföring från den varmare luften till väggytan, dels ett ledningsmotstånd i materialet, dels ett motstånd vid överföring från väggytan till den kallare luften.

Värmets överföring från ett material till ett annat bestämmes av *värmeövergångstalet.* Under 5 och 6 angivas två speciella övergångstal, som erhållit särskild benämning.

5. Värmeöverföringen från den varmare luften till väggytan bestämmes av *värmeingångstalet* α_i, som är den värmemängd, som på tidsenheten genomströmmar ytenheten vid 1° temperaturskillnad mellan luften och väggytan.

6. Värmeöverföringen från väggytan till den kallare luften bestämmes av *värmeutgångstalet* α_u, som är den värmemängd, som på tidsenheten genomströmmar ytenheten vid 1° temperaturskillnad mellan väggytan och luften.

7. Värmets genomföring från väggens ena yta till den andra bestämmes av *värmegenomföringstalet* A, som är den värmemängd, som på tidsenheten passerar genom ytenheten av väggen vid 1° temperaturskillnad mellan yttemperaturerna.

8. Värmets ledning i ett homogent material bestämmes av *värmeledningstalet* λ, som är den värmemängd, som på tidenheten genomströmmar ytenheten vid en temperaturskillnad i materialet av 1° pr längdenhet vinkelrätt mot ytan. Vid en homogen vägg förhåller sig således A till λ som längdenheten till väggtjockleken.

Rörande värmets genomföring, samt inverkan av konvektion och strålning vid väggar med hålrum, har ej några teoretiska beräkningsformler använts, då resultaten hittills varit för få, för bedömandet av olika faktorers inverkan.

Betecknas temperaturerna med de bokstäver, som angivas å fig. 3, kunna följande formler uppställas.

1. Värmegenomgången . . $W = k(R - K)$ kal./tim. m^2.

2. Värmegenomgångstalet . $k = \frac{W}{R - K}$.

3. Värmegenomföringstalet $A = \frac{W}{Ry - Ky}$.

4. Värmeledningstalet . . . $\lambda = A \cdot d$ (d = väggtjocklek).

5. Värmeingångstalet . . . $\alpha_i = \frac{W}{R - Ry}$.

6. Värmeutgångstalet . . . $\alpha_u = \frac{W}{Ky - K}$.

7. Värmemotståndstalet . . $m = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{A} + \frac{1}{\alpha_u}$.

W beräknas i kal./tim. $\overline{m^2}$ och bestämmes genom undersökningarna.

Av de utförda provningarna framgå, att det är övergångstalen α_i och α_u, som är vanskligast att fastställa. Dessa konstanter äro i hög grad beroende av luftrörelserna invid väggytorna och det har vid försök visat sig, att vid fläktning i kylkammaren, så att en vindhastighet av 2 m i sek. uppstod i 45° riktning mot väggytan, ökades α_u med 253 %, huvudsakligen genom att yttemperaturen förändrades.

Därav framgår svårigheterna att uppställa några beräkningsformler för värmegenomgången hos väggtyper med inneslutna luftkanaler. Även om strålningens och ledningens inverkan kan beräknas, så återstår konvektionen och den inverkan den har på övergångstalen, och denna torde variera nästan i samma mån, som antalet olika väggar.

Vid väggar med normal isoleringsförmåga ($k = 1{,}0$) representerar övergångsmotstånden $\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_u}$ vid provningarna ungefär 26 % av hela motståndet $\frac{1}{k}$.

En ökning av luftrörelserna vid ytorna kan således ej försämra isoleringsförmågan annat än inom gränsen av dessa 26 %, förutsatt att ej luft pressas igenom konstruktionen.

För enkel fönsterruta däremot representerar övergångsmotstånden hela motståndet, då ledningsmotståndet i t. ex. en 3 mm glasruta är så litet, att det kan försummas.

Ökad luftrörelse mot en glasruta får därigenom relativt stor inverkan på värmegenomgången.

De försök, som hittills utförts över luftrörelsernas inverkan, hava varit av mera förberedande natur och avsikten är, att vid kommande försök mera systematiskt studera dessa förhållanden.

Försöksserier.

Av de särskilda försöksserier, som utförts under det gångna året, må nämnas:

1. Inverkan av luftskiktets tjocklek mellan tvenne glasrutor.
2. Inverkan av antalet luftskikt mellan glasrutor.
3. Inverkan av luftskiktets höjd mellan glasrutorna.
4. Inverkan av väggtjockleken hos betongväggar.
5. Inverkan av luftkanaler mellan betongväggar.
6. Inverkan av porös fyllning i luftkanaler i väggarna.
7. Värmeisoleringsförmågan hos en del vanliga väggtyper.

Över resultaten av dessa försök hänvisas till Ingenjörsvetenskapsakademiens Handlingar n:o 7.

Vissa fenomen äro därvid av rätt märklig natur. Så visas t. ex. att ända till 19 % större värmeisoleringsförmåga kan erhållas hos en med avseende på mittplanet osymetriskt sammansatt vägg, om värmeströmmens riktning omkastas, eller med andra ord väggen vändes.

Vid de kommande försöken avses, som förut nämts, att studera luftrörelsernas inverkan, varjämte bland annat en del systematiska försök komma att göras över inverkan av byggnadsmaterialiernas porositet och fuktighetshalt. Ett med värmeisoleringen nära sammanhängande spörsmål är även byggnadskonstruktionernas värmekapacitet, som närmare borde undersökas i detta sammanhang.

Om modern framställning av Ohms lag.

Av D. ENSKOG.

I.

I en uppsats med ovanstående titel[1] skiljer lektor Gallander på två sätt att härleda Ohms lag och kallar dem den historiska framställningen och den moderna. Den förra utgår från den elektrostatiska definitionen på potential; vid den senare definierar man potentialdifferensen mellan två punkter genom styrkan av den ström, som pressas fram genom en mellan punkterna inkopplad ledare.

Enligt lektor G. är den moderna framställningen liksom den historiska logiskt oangriplig. Undertecknad vill här närmare granska riktigheten av detta påstående. Som jag hoppas, kommer det att visa sig, att en konsekvent framställning väl *kan* givas från den moderna utgångspunkten, men att detta icke skett i den citerade uppsatsen. Undersökningen synes mig vara av betydelse bl. a. därför, att vid många läroverk den moderna tankegången torde genomföras på ett sätt, som är ännu mindre tillfredsställande.

Efter att hava formulerat några erfarenhetssatser inleder lektor G. sin framställning på följande sätt: »Spänning (potentialdifferens) definieras som orsaken till ström. Spänningen mellan ändpunkterna av en ledare är direkt proportionell mot den elektriska strömmens styrka i densamma.»

I de vanliga läroböckerna framställes den senare av dessa satser som kvantitativ definition på spänning. I verkligheten innehåller den förutom definitionen på spänning en erfarenhetssats. Om mellan två punkter i en ström-

[1] Denna tidskrift s. 82—87, årg. 3.

bana flera ledningar äro inkopplade, så är spänningen mellan de båda punkterna definierad genom strömstyrkan i den ena ledningen. Att strömstyrkorna i de övriga äro proportionella mot spänningen, d. v. s. mot strömstyrkan i den första, är ett faktum, som måste bevisas experimentellt. Att kalla satsen definition är oriktigt och gör det svårt, om icke omöjligt att uppfatta den verkliga tankegången. Det bör nämnas, att lektor Gallander i sin uppsats uppställer ifrågavarande erfarenhetssak, innan spänning definieras.

Definitionen spänning = potentialdifferens ger icke omedelbart någon klar uppfattning om det, som i första hand skall definieras, nämligen potentialen i en punkt. I begreppet potentialdifferens ingå två potentialer. Definitionen är alltså inte så enkel, som den kunde vara, och man kan dessutom icke på förhand säga, om den verkligen för till ett möjligt potentialbegrepp. Antag, att A, B och C äro tre punkter i en strömbana. Potentialen i C antages vara $= V_C$. Spänningarna P_{AB}, P_{AC}, P_{BC} mellan resp. punkter kunna avläsas på en voltmeter. Kallas potentialerna i A och B resp. V_A och V_B, så är enligt definitionen

$$V_A - V_C = P_{AC}$$

eller

$$1) \qquad V_A = P_{AC} + V_C.$$

Enligt samma definition måste också

$$2) \quad V_A = P_{AB} + V_B = P_{AB} + P_{BC} + V_C.$$

Då punkten B kan väljas efter behag, inser man, att den korta satsen spänning = potentialskillnad, innehåller icke en utan oändligt många definitioner på potential. Det är icke på förhand klart, att dessa definitioner överensstämma. För att detta skall vara fallet, måste

$$P_{AC} = P_{AB} + P_{BC},$$

vilket resultat endast kan grundas på experiment.

Definitionen på motstånd är formellt oegentlig på ungefär samma sätt som de hittills granskade definitionerna.

Förhållandet har här mindre betydelse, eftersom satsens hela innehåll logiskt följer ur den egentliga definitionen. Dock bör man naturligtvis uttrycka sig korrekt. Man gör på detta sätt tankegången mest lättfattlig.

Det experimentella beviset för att motståndet hos en ledare är en oföränderlig storhet, om temperatur och tryck äro givna, synes mig böra kompletteras med en erfarenhetssats, som senare skall formuleras.

II.

Det återstår att i korthet visa, huru man kan giva en framställning, som är fri från de påvisade bristerna. För tydlighets skull numrerar jag de erfarenhetssatser, som äro behövliga. Jag förutsätter, att den stationära strömmens viktigaste allmänna egenskaper äro bekanta. (I en ogrenad ledning har strömmen överallt samma riktning och styrka. I en grenledning är strömstyrkan i huvudledningen lika med summan av strömstyrkorna i grenarna.)

Sats 1. Om man i en grenledning varierar strömstyrkan, så ändras strömstyrkorna i grenarna i samma proportion. Strömmarna gå åt samma håll.

Som lektor Gallander påpekar, är denna sats inte allmängiltig. Den gäller t. ex. icke för en gren, som innehåller elektromotoriska krafter.

Sats 2. Förhållandet mellan strömstyrkorna i två parallellkopplade ledningar är lika, om andra ledningar äro inkopplade parallellt med dem eller ej.

De två parallellkopplade ledningarna tillhöra den grupp, för vilken sats 1 gäller.[1]

Sedan dessa satser äro genomgångna, kan man definiera ledningsmotstånd och spänning. Man förklarar kvali-

[1] Om man önskar, kan man även visa, att resultaten av dessa försök (d. v. s. förhållandet mellan två strömstyrkor) icke påverkas av att man sätter en godtycklig punkt på den slutna strömbanan i förbindelse med jorden, så framt ledningen för övrigt är isolerad. För övrigt gör man försöken instruktiva. Man får troligen anledning till den observationen, att strömstyrkan blir liten, om ledningen är lång eller fin, och att det icke medför någon märkbar ändring i strömstyrkan, om en trådformig ledare böjes eller rullas.

tativt den förra termens innebörd och uppställer definitionen på 1 ohm. Man tänker sig vidare en grenledning, där ena grenen a är en kvicksilverpelare med 1 ohms motstånd eller en därmed ekvivalent ledning,[1] innehållande strömmätare. Av satserna 1 och 2 drar man den slutsatsen, att förhållandet mellan strömstyrkan i a och strömstyrkan i en given annan ledning är en oföränderlig storhet, om temperatur och tryck äro konstanta. Är den senare strömstyrkan $= \frac{1}{R}$ av den förra, så sätter man definitionsvis den senare ledningens motstånd $= R$ ohm. Definitionen ger omedelbart en metod att mäta motstånd.

Är vidare strömstyrkan i ledningen $a = 1, 2 \ldots P$ ampère, så sätter man genom definition spänningen mellan grenarnas ändpunkter $= 1, 2 \ldots P$ volt. Mot samma strömstyrka i en given ledning (motståndet konstant) låter man samma spänning mellan ledningens ändpunkter svara. Är strömstyrkan I ampère, motståndet R ohm och spänningen P volt, så finner man omedelbart

$$I = \frac{P}{R}.$$

Formeln innehåller satserna: Strömstyrkan i en given ledning är vid lika temperatur och tryck direkt proportionell mot spänningen mellan ledningens ändpunkter. Vid given spänning mellan ändpunkterna av en ledning är strömstyrkan omvänt proportionell mot ledningens motstånd.

Härefter följer beskrivning av voltmetern. Man kan antaga och verifiera genom experiment, att inkopplandet av en voltmeter icke märkbart stör strömförloppet i ett ledningssystem, om voltmeterns motstånd är tillräckligt stort. För att detta antagande skall vara rimligt fordras, att om voltmetern utbytes mot en annan med ännu större motstånd, den senare ger samma utslag som den förra.

[1] Två ledningar äro ekvivalenta, om de som parallellkopplade grenar genomlöpas av lika starka strömmar.

Spänningen mellan två godtyckliga punkter inom ett ledningssystem anges i enlighet därmed av utslaget på en mellan punkterna inkopplad voltmeter med tillräckligt stort motstånd.

Genom experiment bestämmer man lämpligen voltmeterns motstånd eller en undre gräns för detsamma (voltmeter och milliampèremeter eller ampèremeter i serie). Man kontrollerar dess gradering med hjälp av ampèremeter och ohm-étalon och lämnar en framställning av ampèremeter- och voltmetermetoden för mätning av motstånd.

Därpå härledes experimentellt

Sats 3. Om A, B och C äro punkter på en ledning eller ett system av ledningar, så är

$$P_{AC} = P_{AB} + P_{BC},$$

om P_{AC}, P_{AB} och P_{BC} beteckna spänningarna mellan resp. punkter.

Satsen gäller närmast, om punkterna äro så betecknade, att inom de inkopplade voltmetrarna strömmarna gå i riktning $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ och $A \rightarrow C$ eller omvänt. Låter man allmänt P_{AB} vara positivt, när strömmen går i riktningen $A \rightarrow B$, negativt i motsatt fall, så är den nämnda inskränkningen onödig.[1]

Man kan nu definiera potentialen i en godtycklig punkt inom ledningssystemet. I en bestämd punkt C antages potentialen ha värdet V_C (t. ex. 0), och man sätter som definition

$$V_A = P_{AC} + V_C. \quad (V_B = P_{BC} + V_C).$$

Därav följer enligt sats 3:

$$V_A - V_B = P_{AC} - P_{BC} = P_{AB}$$

eller i ord: Spänningen mellan två godtyckliga punkter på

[1] Satsen gäller även, om ledare av andra slaget ingå i strömbanan, men dessa måste sättas i förbindelse med resp. voltmetrar genom ledningar av en och samma metall. Störande inverkan av termoelektriska krafter undvikes på motsvarande sätt. Det närmare studiet av potentialfördelningen i sådana ledare antages höra till ett något senare stadium.

en ledning eller ett system av ledningar är lika med potentialskillnaden mellan punkterna.

Ur detta resultat eller direkt ur sats 3 bevisar man teoretiskt satsen, att motståndet i en ledning ABC, bestående av två seriekopplade ledningar AB och BC (för vilka Ohms lag gäller), är lika med summan av motstånden i AB och BC. Antagas resp. motstånd vara R, R_1 och R_2 ohm, och tänker man sig en ström av I ampères styrka gå fram genom ledningen, så är enligt t. ex. sats 3 och ohms lag

$$RI = R_1 I + R_2 I \text{ eller } R = R_1 + R_2.$$

Ett annat viktigt resultat, som förutsätter sats 3 eller likheten spänning = potentialskillnad, är följande. Antag, att B är en punkt på en (ej ogrenad) ledning AC, att strömstyrkan i AB är I_1 amp. (I positivt i riktningen $A \rightarrow B$, negativt i motsatt riktning), i BC I_2 amp., och att resp. motstånd äro R_1 och R_2 ohm. Av sats 3 och Ohms lag följer då

$$P_{AC} = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

eller allmännare

$$P = \Sigma RI.$$

Denna sats kan naturligtvis genomgås senare.

Sedan man sålunda härlett Ohms, lag, undersöker man experimentellt jämntjocka, homogena trådars motstånd. Att motståndet är proportionellt mot trådens längd kan man även bevisa teoretiskt ur sats 3 eller någon av dess följdsatser. Motståndets beroende av genomskärningsytan måste härledas experimentellt. Man vinner i överskådlighet på att icke sammanblanda denna undersökning med den föregående.

Genomgången av Joules lag bör giva anledning till ett fördjupande av potentialbegreppet. Om en ström av I ampères styrka under t sekunder går fram genom en ledning från en punkt A till jorden, så är den transporterade elektricitetsmängden = It coulomb, den värmemängd, som utvecklas = $V_A It$ joules. Därav följer, att V_A är lika med det arbete, som uträttas av de elektriska krafterna, då en-

heten elektricitet förflyttas från A till jorden. Det uträttade arbetet är oberoende av den ledning, genom vilken elektriciteten transporteras, och den väg, på vilken transporten sker. Man påpekar den sista satsens samband med energiprincipen.

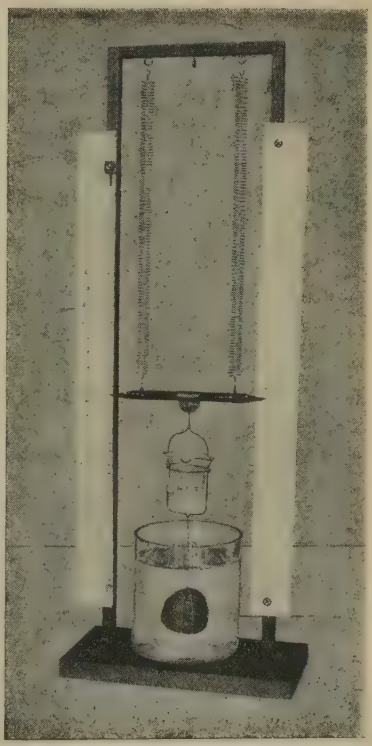
För att konsekvent genomföra teorien fordras alltså flera experiment, än lektor Gallander har förutsatt. De nya försöken kunna emellertid utföras lika lätt och med lika enkla hjälpmedel som de övriga. De reflexioner, som anknytas till försöken, äro av enklaste slag. Framställningen förlorar över huvud taget ingen av sina didaktiska fördelar men vinner i klarhet och lättfattlighet. Man har därför ingen anledning att uppoffra konsekvensen. Det bör icke glömmas, att ur pedagogisk synpunkt skenbevis äro ännu mer förkastliga än »experiment på tavlan».

En tvåfjädervåg för fjärde klassen.

Av CARL LING.

En liten lätt förfärdigad apparat, som förf. har haft gagn av vid fysikundervisningen i 4:e klassen (även R I) är en tvåfjädervåg, som i huvudsak är gjord efter en beskrivning av d:r Karl Rosenberg i fjärde häftet, årgång 31, av Poskes tidskrift, men som är i någon mån omändrad.

Vägningar med balansvåg och vikter bli lätt tidsödande och fånga ej elevernas intresse i den grad, som vägningar med en fjädervåg, utförd i så stora mått, att vägningsresultaten bli fullt synliga för klassen, balansvågen bli eleverna för övrigt förtrogna med på laborationstimmarna. Även den synpunkten, att eleverna se, att de kunna utföra noggranna vägningar med en våg, som är alltigenom förfärdigad av läraren, är av värde.



Vidstående fotografi av apparaten kompletteras med några uppgifter om dess mått och utförande. I fotplattan, $24 \times 11 \times 2$ cm, infällas två träpelare, $63 \times 1{,}2 \times 1{,}2$ cm, med ett inbördes avstånd av 16 cm. Upptill mellan dem fastskruvas en trästav, i vilken fjädrarna hängas med ringskruvar. Dessa göras av 0,5 mm

pianotråd lämpligen så, att man binder fast tråden vid en 1 cm tjock metallstång och vrider stången med jämna tag (ändan bör ha en fast stödpunkt), medan tråden för erhållande av likformig spänning löper mellan två trästycken, som fastskruvats i ett skruvstäd, så att tråden upplindas i tätt liggande varv. Med 100 varv i varje fjäder blir förlängningen 1,7 mm för varje gram. I fjädrarna hänges en tunn cylindrisk trästav och i vardera av dennas ändar fästes en aluminiumvisare. Omkring staven vikes ett mässingsbleck, som till en början nitas så, att det kan förskjutas på staven; man måste nämligen genom försök uppsöka vågskålens anbringningspunkt, ty fjädrarna bli ej fullt regelbundna och lika. Man fäster då en mm-remsa på varje pelare och förskjuter blecket, tills visarna visa samma förlängning för en belastning av exempelvis 100 gr. Förf. har gjort vågskålen i form av en bägare; detta medför den fördelen, att man omedelbart kan väga även vätskor samt visa Archimedes princip för kroppar av godtycklig form. Glasbägaren, som rymmer 75 gr, är fast infattad i en korg av mässingstråd och denna korg är avtagbar. Skalan är av vitt papp och skjutbart anbragt på vänstra pelaren, en motsvarande pappremsa fästes på den andra pelaren för att hindra störande pendelsvängningar. Av samma skäl upphänges vågskålen efter vågens begagnande i en krok mellan fjädrarna.

På ett synnerligen överskådligt och tidvinnande sätt demonstreras med denna våg Archimedes princip. En sten nedsänkes vid en tråd i Molls bägare och deplacementet uppsamlas. Därefter hänges stenen medelst en hake under vågskålen (mässingtråden, på vilken bägaren vilar, är mitt under bägaren nerviken till en ring) och vikten antecknas. En större bägare föres under och vatten ihälles långsamt, tills vattenytan når över stenen, då vikten ånyo avläses. Slutligen hälles deplacementet i vågskålen, och man iakttager, att det fullkomligt ersätter den förra »viktsförlusten».

D:r Rosenberg utför försöket så, att han sätter en flytt-

bar klämma mitt för visaren vid första vägningen och endast iakttager, att visaren går ner till samma märke, sedan vågen belastats med deplacementet. Lämpligare är, att, som ovan beskrivits, avläsa vikten för varje gång; eleverna i 4:e klassen fatta ej så lätt, som man skulle tro, innebörden av detta, att visaren återgår till sitt första läge.

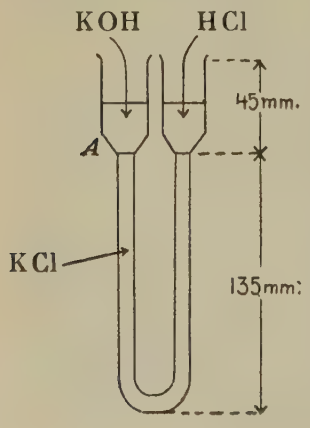
Den ringa känsligheten hos vågen — tiondelsgram kunna skattas — är snarast en fördel, icke blott därför, att 4:e klassens kurs ej är anlagd på mätningar med högre grad av noggrannhet utan även därför, att de två felkällor, som ligga i volymsbestämningen och i den hydrostatiska vägningen vid den experimentella härledningen av Archimedes princip, för vilken vågen ursprungligen är avsedd, hålles inom ungefär samma gränser. De värden på volymen, som man erhåller med Molls bägare, differera lätt på mellan 0,1 och 0,2 gr. — varje droppe betyder c:a 0,08 gr., även vattenavdunstningen spelar in — medelvärdet blir visserligen, som man kan vänta, i allmänhet tämligen nära det riktiga; medelvärden böra dock såvitt möjligt undvikas vid verifiering av en exakt naturlag. Alltså bör en vägning med en noggrannhet av ungefär 0,1 gr. anses fullt tillräcklig för verifiering av Archimedes princip.

Ett par skolförsök över diffusion.

Av A. FRENDEL.

Det vanligast använda sättet att påvisa diffusion består väl däri, att läraren lägger några kristaller av ett färgat salt, t. ex. kopparsulfat eller kaliumpermanganat på bottnen av en mätcylinder och skiktar vatten över. De närmast följande fysiktimmarna tar han så fram den och visar för eleverna, hur den färgade vätskepelaren skjuter i höjden. Gäller det endast kvalitativa försök, så går det ju bra med denna metod, men om det gäller kvantitativa mätningar, t. ex. av hur lång väg diffusionen fortskrider under vissa bestämda tider, så blir det svårare. Gränsytan blir inte alltid fullt skarp och rubbas även lätt, när man, vilket oftast inte kan undvikas, flyttar på cylindern. I det följande skall jag beskriva ett förfaringssätt, vid vilket just dessa båda olägenheter bortskaffats. *Dessutom tillåter det en undersökning över diffusionshastigheten hos joner.*

Jag använder mig av en metod, som utgör en modifikation av den, för vilken Arrhenius redogör i sin bok »Kemien och det moderna livet», (sid. 214), och som där använts för att åskådliggöra jonernas vandring vid elektrolys. Av praktiska skäl har jag givit röret en något avvikande form, nämligen formen av ett u-rör, av det utseende, som vidst. figur visar. Bland annat är det då lättare att hålla temperaturen konstant genom att hänga ner röret i en bägare med vatten. Inre diametern hos den smalare delen är 4 mm, inre diametern hos den



bredare övre delen 18 mm. För övrigt framgår dimensionerna av figuren.

1. *Hur beror den vägsträcka, som diffusionen tillryggalägger, av den tid, under vilken diffusionen varat?*

Jag bereder en c:a 1-normal lösning av kaliumklorid i vatten, tillsätter under uppvärmning c:a 10 % gelatin samt några droppar lackmus. När det hela blivit homogent, häller jag av detta i den smalare delen av u-röret, upp till *A*. Vätskan stelnar på ett par minuter till ett gelé. När det antagit rummets temperatur, häller jag i det ena av de vidare rören upptill 1-normal kaliumhydroxidlösning, i det andra 1-normal saltsyra (låt oss antaga KOH i röret till vänster på figuren, HCl i röret till höger).

I vänstra delen av röret har jag nu kaliumjoner i samma koncentration såväl över som under *A*. De ha då tydligen ingen anledning att diffundera åt något håll. Men av de negativa jonerna finns ovanför *A* hydroxyljoner, nedanför *A* kloridjoner. Det är då tydligt, att OH-jonerna skola diffundera neråt och Cl-jonerna uppåt, genom gränsytan i *A*. OH-jonernas väg nedåt markeras av att lackmusen färgas blå. På samma sätt blir det i gränsytan till höger ett diffusionsutbyte av positiva joner (väte- och kaliumjoner), medan de negativa kloridjonerna här förekomma i ungefär samma koncentration över som under gränsytan. Allt efter som H-jonerna tränga neråt, färgas lackmusen röd. Gränsytorna bli skarpa som knivseggar. Färgskillnaden mellan den röda och violetta lackmusen är emellertid ganska ringa, och därför är gränsytan mellan dessa båda skikt ibland svår att upptäcka vid konstgjord belysning. I tabell 1 lämnas några siffervärden för ett dylikt försök.

Som synes äro vägsträckorna, som ett visst slag av joner diffunderat sedan försökets början, proportionella mot kvadratroten ur den tid, som förflutit sedan försökets början. Detta gäller för såväl väte-jonen som hydroxyl-jonen. Att diffusionen följer denna lag har man vetat sedan slutet av 1880-talet genom undersökningar av Stefan, Coleman, Chabry och

Tabell 1.

Tid	Väg för H-jon	Väg för OH-jon	Temp.	$\frac{v}{\sqrt{t}}$ för $H^{\cdot}$	$\frac{v}{\sqrt{t}}$ för OH'	$\frac{v_H}{v_{OH}}$
2 tim.	15,0 mm	11,0 mm	14°,0	10,6 mm	7,8 mm	1,36
8 »	29,9 »	21,6 »	13,5	10,6 »	7,6 »	1,38
13 »	37,5 »	27,6 »	13,0	10,4 »	7,7 »	1,36
20 »	46,7 »	33,8 »	13,0	10,4 »	7,6 »	1,38
24 »	51,0 »	36,5 »	13,0	10,4 »	7,5 »	1,40
25 »	52,6 »	37,6 »	13,9	10,5 »	7,5 »	1,40
47 »	71,8 »	51,2 »	13,9	10,5 »	7,5 »	1,40
71 »	89,0 »	62,1 »	13,9	10,6 »	7,4 »	1,43
93 »	102,0 »	71,0 »	13,9	10,6 »	7,4 »	1,44

andra. $\frac{v}{\sqrt{t}}$ är måttet på den vägsträcka, som jonen i fråga diffunderar under första timmen.

Man ser även, att H-jonen diffunderar åtskilligt fortare än OH-jonen, och att förhållandet mellan de vägsträckor, som dessa joner tillryggalägga på lika tider, är konstant, åtminstone i början av försöket. Som värde på detta förhållande torde kunna antagas talet 1,38. Man får emellertid icke fatta saken så, att detta tal under alla omständigheter betecknar förhållandet mellan vätejonens och hydroxyljonens diffusionshastigheter. Utför jag samma försök med ämnena 1-normal NaOH |1-norm. NaCl med 10 % gelatin och lackmus| 1-normal HCl, så erhåller jag ett annat värde på förhållandet mellan vätejonens och hydroxyljonens diffusionshastighet.

2. *Hur beror den vägsträcka, som diffusionen tillryggalägger på en viss tid av koncentrationen hos den diffunderande substansen?*

Jag har samma försöksanordning som i föregående fall, men använder ekvinormala lösningar av motsvarande natriumföreningar i stället för av kalium. Koncentrationen varierade jag så som framgår av tab. 2. Framhållas bör, att såväl basen, som syran och saltet vid ett och samma försök ha samma koncentration sinsemellan. Temperaturen i rummet var c:a 15° C, och diffusionen pågick i 21 tim.

Tab. 2.

Konc. (n)	v_H	v_{OH}	$\frac{v_H}{\sqrt[3]{n}}$	$\frac{v_{OH}}{\sqrt[3]{n}}$	$\frac{v_H}{n}$	$\frac{v_{OH}}{n}$
1 n	46,7 mm	31,6 mm	46,7 mm	31,6 mm	46,7 mm	31,6 mm
0,5 »	39,0 »	27,0 »	49,1 »	34,0 »	78 »	54 »
0,1 »	22,0 »	14,8 »	47,4 »	31,9 »	220 »	148 »
0,01 »	[1]	6,5 »		30,1 »		650 »

Av tab. 2 framgår, att *vägsträckorna, som en jon diffunderar på en och samma tid (och temperatur), äro direkt proportionella mot kubikroten ur koncentrationen.*

Enligt Wilh. Ostwald skulle dessa vägsträckor vara direkt proportionella mot koncentrationen. Han skriver i sin »Grundriss der allgemeinen Chemie», sid. 196, på tal om diffusion: Sehr einfache Verhältnisse solcher Versuche liegen vor, wenn man an einem Ende einer langen Säule des Lösungsmittels eine konstante Konzentration der Lösung (etwa durch die Gegenwart festen Stoffes, der die Lösung gesättigt erhält) bestehen lässt. Die Strecke, bis zu der eine bestimmte (durch ein Reagens bemerkbare) Konzentration vorgedrungen ist, erweist sich dann als proportional der Diffusionskonstanten, der Quadratwurzel aus der Zeit *und der konstanten Konzentration am Ende der Säule. Das Gleiche gilt von der eingedrungenen Stoffmenge* (Kurs. av mig.)

Detta kan uppenbarligen icke vara riktigt. En blick på kolumnerna för kvoten $\frac{v}{n}$ i tab. 2 är nog för att övertyga om detta.

[1] För den 0,01 normala lösningen lyckades jag ej uppfatta gränsen för H-jonens framskridande.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bevisar avplattningen vid polerna att jorden varit flytande?

Som bevis för att jorden under en period av sin tillvaro befunnit sig i flytande tillstånd, har Newton anfört jordens avplattning vid polerna. Då jag icke sett någon invändning mot detta argument utan tvärt om ideligen finner detsamma omnämnt utan anmärkning, anser jag mig böra delgiva mina tvivel på dess värde.

Tankegången i argumentet är, att ett flytande klot, som bringas att rotera, blir en rotationsellipsoid, medan ett fast klot bibehåller sin form trots rotationen.

Mot detta argument kan redan den anmärkningen göras, att dess senare del är en tvivelaktig sanning, ty även i en fast kropp måste centrifugalkraften alstra spänningar, som platta till kroppen. Om denna tillplattning är omärklig för en liten kropp, behöver den därför ej vara omärklig för en stor kropp. Att jordens materia skulle motstå den väldiga spänning som skulle uppstå, om jorden vore klotformig och roterade som nu, synes osannolikt, i all synnerhet som ju allting flyter, om än aldrig så trögt.

Men även om man antager, att jorden varit en fast sfär, och att centrifugalkraften icke direkt förmått ändra dess form, så skulle likväl jorden med tiden blivit en rotationsellipsoid under inverkan av de nedbrytande krafterna och centrifugalkraften gemensamt. Ty det slutliga jämviktstillståndet på jorden för vätskeytor, slambottnar, sand- och grusavlagringar m. m. är till följe rotationen icke sfäriska ytor utan rotationsellipsoidiska ytor.

Jordens avplattning vid polerna bevisar alltså icke, att jorden varit flytande. *H. Svenonius.*

Angående en uppsats om Ohms lag.

I Pedagogisk Tidskrift 1921, h. 8, sid. 204 o. följande har lektor Ohlon en uppsats om Ohms lag. Han betjänar sig vid härledningen av denna lag av en elektrometer. Antagligen förutsätter han då som självklart, att dess utslag äro proportionella mot spänningen, d. v. s. han definierar spänningen genom detta instruments utslag. Detta tillvägagångssätt synes undertecknad vara olämpligt. En voltmeter är givetvis att föredraga både av teoretiska och praktiska skäl. I övrigt sammanfaller lektor Ohlons metod med den av mig under långliga tider använda och av mig i min elementära elektricitetslära återgivna.

En formell olikhet av värde hos Ohlon är, att han helt enkelt kallar $\varrho \frac{l}{a}$ för motstånd. Från logisk synpunkt blir denna definition på motstånd den samma som den av mig använda, men formuleringen blir enklare, vilket är av pedagogiskt värde. *Otto Gallander.*

Matematiska uppgifter.

109) Två plan P och Q skära varandra under vinkeln v. En linje a i P gör med planens skärningslinje vinkeln α. Hur stor vinkel gör den med sin projektion på Q? Och hur stor är denna projektion? *M—r.*

110) Diskutera fullständigt problemet: Sök orten för medelpunkten till en cirkel, som tangerar två givna cirklar. *M—r.*

111) Bevisa att uttrycken:

$$3^{4n+1}+10 \cdot 3^{2n}-13 \text{ och } 3^{2n+3}+40n-27$$

äro divisibla med 64.

112) Varje punkt på den mellanskrivna sfären till en reguliär tetraeder har den egenskap, att summan av dess potenser med avseende å de sfärer, som uppritas på tetraederns kanter såsom diametrar, är lika med 0.

113) Hur stor behöver excentriciteten hos en ellips vara för att däri skall kunna inskrivas en parallellogram med en spetsig vinkel, vars tangent är μ? *M—r.*

114) Att genom en punkt på en cirkel med radien r draga en korda, så att summan av kordan och dess avstånd från medelpunkten blir $= m$. Diskussion!

Lösningar till uppg. i häft. I. 1921—22.

97) *Lös ekvationerna*

$$\sqrt{x+7} \pm \sqrt{x+5} \pm \sqrt{x+3} \pm \sqrt{x+2} = 0.$$

En dylik ekvation anses blott hava en rot, om denna gör alla radikalerna reella. Kallas radikalerna A, B, C, D, så fås följande 8 ekvationer:

1) $A+D= B+C.$	5) $A-D= B+C.$
2) $A+D=-B-C.$	6) $A-D=-B-C.$
3) $A+D= B-C.$	7) $A-D= B-C.$
4) $A+D= C-B.$	8) $A-D= C-B.$

Kvadreras dessa, så övergå

1) och 2) till 9) $1+2\sqrt{(x+7)(x+2)} = 2\sqrt{(x+5)(x+3)}$

3) » 4) » 10) $1+2\sqrt{(x+7)(x+2)} = -2\sqrt{(x+5)(x+3)}$

5) » 6) » 11) $1-2\sqrt{(x+7)(x+2)} = 2\sqrt{(x+5)(x+3)}$

7) » 8) » 12) $1-2\sqrt{(x+7)(x+2)} = -2\sqrt{(x+5)(x+3)}.$

Kvadreras dessa åny, så övergå

9) och 10) till 13) $4\sqrt{(x+7)(x+2)} = 3-4x$

11) » 12) » 14) $-4\sqrt{(x+7)(x+2)} = 3-4x$

vilka giva $x = -\frac{215}{168}$.

Detta måste satisfiera 13) eller 14), sål. *13*), då h. m. blir > 0. Men 13) fås ur 9) och 10). Då emellertid 10) är orimlig (h. m. < 0, v. m. > 0) måste värdet alltså satisfiera 9), sål. ant. 1) eller 2), men då 2) är orimligt, satisf. den således ekv. 1).

Löst av *M. Hauge, O. A. L.* och *X.*

98) *Visa att det finnes ett tal a, sådant att för alla* $m < a$ *uttrycket* $y = mx^2 + (m-1)x + m - 1$ *är* < 0, *vilket reelt tal* x *än må vara.*

Sätt $$y = m\left\{x^2 + \frac{m-1}{m}x + \frac{m-1}{m}\right\} =$$

$$= m\left\{\left(x + \frac{m-1}{2m}\right)^2 + \frac{m-1}{m} - \left(\frac{m-1}{2m}\right)^2\right\} =$$

$$= m\left\{\left(x + \frac{m-1}{2m}\right)^2 + \frac{(m-1)(3m+1)}{4m^2}\right\},$$

så inses genast, att y alltid är negativt för $m < -\frac{1}{3}$, och att vi således kunna sätta $a = -\frac{1}{3}$. Löst av *O. A. L.*

99) *I en cirkel med radien r inpassas en korda av given längd. Genom dess ändpunkter dragas linjer parallella med två givna, mot varandra vinkelräta linjer i planet. Sök orten för deras skärningspunkter då kordan ändrar läge.*

Beteckna den givna kordans längd med $2l$ och dess avstånd från cirkelns medelpunkt med p ($\therefore p^2 = r^2 - l^2$). Cirkelns medelpunkt tages till origo, och koordinataxlarna dragas parallella med de givna mot varandra vinkelräta linjerna. Perpendikeln p från origo mot den rörliga kordan gör vinkeln α med x-axeln Den sökta skärningspunktens koordinater äro x och y.

Man får då omedelbart:

$$x = p\cos\alpha + l\sin\alpha$$
$$y = p\sin\alpha + l\cos\alpha.$$

Elimineras $\cos\alpha$ mellan dessa ekv., fås:

$$(p^2 - l^2)\sin\alpha = py - lx;$$

och genom elimination av $\sin\alpha$:

$$(p^2 - l^2)\cos\alpha = px - ly.$$

Genom kvadrering och addition av de båda sista ekv. fås:

$$(p^2 - l^2)^2 = (py - lx)^2 + (px - ly)^2 =$$
$$= (p^2 + l^2)(x^2 + y^2) - 4plxy.$$

Genom koordinatvridning 45° finner man, att detta betyder

en ellips, vars halv-axlar äro $p+l$ och $p-l$ (resp. $l-p$). Dess axlar dela vinklarna mellan koordinataxlarna mitt i tu.

Tar man i stället skärningspunkten mellan de å fig. 1 prickade linjerna, finner man på samma sätt en ellips, vars axlar ligga utefter samma linjer som den förras, men dess storaxel ligger utefter den förras lillaxel.

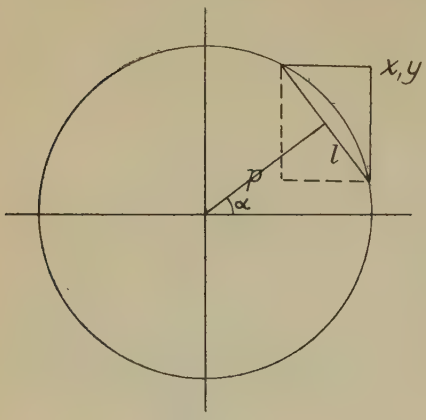


Fig. 1.

Den sökta orten utgöres således av de båda nämnda ellipserna. För $p=l$ övergå dessa till tvenne mot varandra vinkelräta linjer.

O. G—r.

Även löst av *O. A. L.* samt *X*, vilken även visat, att de båda givna linjerna ej behöva vara mot varandra vinkelräta.

100) *Sök de andragradsfunktioner* $f(x)$ *som äro så beskaffade, att* $f(x^2-1)$ *är divisibel med* $f(x)$.

Sättes $f(x)=x^2+a_1x+a_0$, så är

$$f(x^2-1)=x^4+x^2(a_1-2)+1-a_1+a_0.$$

Detta skall nu sättas term för term lika med produkten av $f(x)$ och en annan andragradsfunktion $x^2+b_1x+b_0$, vilket ger:

$$\begin{aligned}
&1)\ a_1+b_1=0\\
&2)\ a_0+b_0+a_1b_1=a_1-2\\
&3)\ a_0b_1+a_1b_0=0\\
&4)\ a_0b_0=a_0-a_1+1.
\end{aligned}$$

Ur 1) ses genast, att $b_1=-a_1$, vadan 3) ger, att antingen $a_1=0$ eller $a_0=b_0$. Om då $a_1=0$, så fås ur 2) och 4) $a_0=-\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, vilket ger värden. Om däremot $a_0=b_0$, få vi ur ekvationerna 2) och 4) följande:

$$a_0=\frac{a_1^2+a_1-2}{2};\ a_0(a_0-1)+a_1-1=0$$

varur genom insättning

$$(a_1^2+a_1-2)(a_1^2+a_1-4)+4a_1-4=0.$$

Då man emellertid lätt inser, att ekv. satisfieras av $a_1=\pm 1$, så kan man skriva ekvationen

$$(a_1^2-1)(a_1^2+2a_1-4)=0,$$

och vi få alla de sökta lösningarna till följande:

1, 2) $f(x)=x^2-\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

3) $f(x)=x^2+x$

4) $f(x)=x^2-x-1$

5, 6) $f(x)=x^2-x(1\pm\sqrt{5})+\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,

vilka naturligtvis även kunna multipliceras med godtyckliga koefficienter.

Löst av *X*.

101) *Om AA_1, BB_1 och CC_1 äro tre begränsade linjer i rymden, som skära varandra i punkten S, så förhåller sig volymerna av tetraederna $SABC$ och $SA_1B_1C_1$ som $SA\cdot SB\cdot SC$: : $SA_1\cdot SB_1\cdot SC_1$.*

Om från punkterna B och B_1 dragas linjer BH och B_1H_1 vinkelräta mot planet $SACA_1C_1$ så äro dessa parallella och förhålla sig således som $SB:SB_1$. Tetraedrarna förhålla sig således som $\frac{SB}{SB_1}\cdot\frac{\triangle SAC}{\triangle SA_1C_1}$ varur satsen följer.

Löst av *X* samt *O. A. L.*

102) *I en tetraeder äro motstående kanter a och a_1, b och b_1, c och c_1 mot varandra vinkelräta. Visa att*

a) varje höjd av tetraedern träffar basen i skärningspunkten för dennas höjder,

b) produkterna aa_1, bb_1, cc_1 äro omvänt proportionella mot de kortaste avstånden mellan a och a_1, b och b_1 samt c och c_1.

c) $a^2+a_1^2=b^2+b_1^2=c^2+c_1^2$.

Låt a, b, c vara sidorna i en bottentriangel ABC. P den mot denna stående spetsen i tetraedern. Höjden PH är då $\perp$ bottentriangeln, sål. t. ex. mot sidan c, men c_1 är

även $\perp c$, således linjen CH vinkelrät mot c. H ligger således på höjden mot c, och på samma sätt bevisas att den ligger på höjderna mot övriga sidor.

Kortaste avståndet h_a mellan a och a_1 är en linje som skär dem båda vinkelrätt. Låt den skära a_1 i R Triangeln CRB är då vinkelrät mot a_1 (ty $a_1 \perp a$ och mot h_a) och dess yta är $\frac{a \cdot h_a}{2}$.

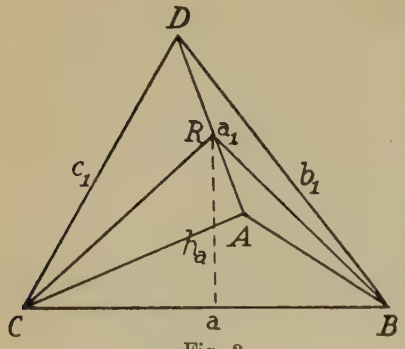


Fig. 2.

Men hela tetraederns volym V består då av två tetraedrar med gemensam basyta CRB och sammanlagda höjderna $= a_1$, varför vi hava

$$V = \frac{1}{3} \cdot a_1 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2},$$

således $aa_1 \cdot h_a =$ konstant, eller aa_1 omvänt proportionellt mot h_a.

Om man slutligen i fig. 2 $DABC$ fullbordar parallellogrammen $DABE$, så blir $\overline{CE}^2 = a^2 + a_1^2 = c^2 + c_1^2$, varur satsens sista del omedelbart framgår.

Signaturen X har givit oss en relativt fullständig utredning angående tetraedrar med parvis vinkelräta kanter, varur bl. a. ovanstående satser och deras omvändningar följa. Utrymmet medger ej intagandet härav.

Några formelhärledningar i stereometrin.

Av OLOF JOSEPHSON.

Bland geometriska användningar av derivatbegreppet upptages stundom derivationssambandet mellan en cirkels omkrets och yta samt mellan en sfärs yta och volym. Är cirkelns radie r, omkretsen l, ytan C, och ger man radien ett tillskott Δr, så erhåller C ett tillskott ΔC. som approximativt kan anses som summan av en mängd små parallelltrapez, vilkas mindre baser ha summan l, de större baserna summan $l+\Delta l$, och vilka alla ha höjden Δr. Härav erhålles

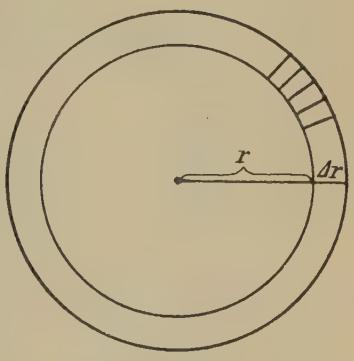


Fig. 1.

$$l\,\Delta r < \Delta C < (l+\Delta l)\,\Delta r,$$

och således är

$$\frac{dC}{dr} = l.$$

På analogt sätt får man för en sfär med radien r, ytan A och volymen V

$$A\,\Delta r < \Delta V < (A+\Delta A)\,\Delta r,$$

varav

$$\frac{dV}{dr} = A.$$

Samma metod ger för en rät cirkulär cylinder med basradien r, mantelytan M och volymen V sambandet

$$\frac{dV}{dr} = M.$$

Dessa härledningar äro, om de också ej motsvara de krav, som en strängt vetenskaplig behandling ställer, värdefulla såsom belysande de infinitesimala metoder, med vilka icke minst den matematiska fysiken arbetar.

Då numera derivatbegreppet ingår i realgymnasiets matematikkurs, är det givetvis en fördel, om det kommer till användning inom olika områden och därigenom befordrar en enhetlig metod. Beträffande härledningen av stereometrins vanliga formler kan detta ske i stor utsträckning. I de vanliga läroböckerna i funktionslära härledas ju med derivatans hjälp exempelvis formlerna för pyramidens och den cirkulära konens volymer. Ur den sistnämnda, tillämpad på en rät kon, kan man genom derivation erhålla uttrycket för mantelytan. Låt oss nämligen uttrycka volymen i basradien r och toppvinkeln 2α, således

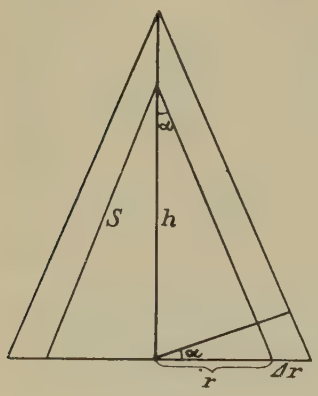


Fig. 2.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \cot \alpha .$$

Med bibehållande av toppvinkeln ge vi r ett tillskott Δr och erhålla då enligt samma metod som ovan använts

$$M\,\Delta r \cdot \cos\alpha < \Delta V < (M + \Delta M)\,\Delta r \cdot \cos\alpha ,$$

då M är den givna konens mantelyta. Således är

$$\frac{dV}{dr} = M \cos\alpha ,$$

varav

$$M = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{dV}{dr} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \pi r^2 \cot\alpha = \frac{\pi r^2}{\sin\alpha} = \pi r s .$$

Man skulle kunna direkt härleda även formlerna för den *stympade konens* volym och mantelyta, men den vanliga subtraktionsmetoden är lika enkel som de eljest erforderliga integrations- och derivationsmetoderna.

Däremot ställer sig en direkt härledning av formeln för *klotskivans* volym synnerligen fördelaktig. Vi utgå från likheten

$$\frac{dV}{dx}=\pi y^2,$$

gällande för en rotationskropp med x-axeln till rotationsaxel, och tillämpa den på den sfär, som bildas genom rotation av cirkeln

$$(x-c)^2+y^2=a^2+c^2$$

$$\therefore\ y^2=a^2+2cx-x^2.$$

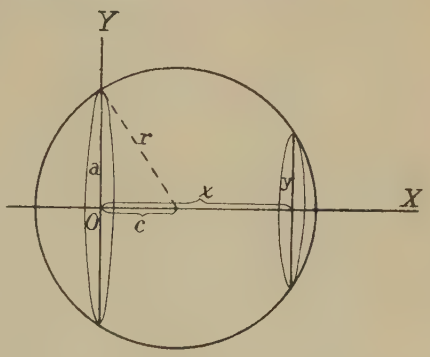


Fig. 3.

Låt V vara volymen av den i figuren angivna klotskivan, så är således

$$\frac{dV}{dx}=\pi\,(a^2+2cx-x^2),$$

varav

$$V=\pi\left(a^2x+cx^2-\frac{x^3}{3}\right)=\frac{\pi x}{2}\left(2a^2+2cx-\frac{2x^2}{3}\right).$$

Men av kurvans ekvation erhålles

$$a^2+2cx=y^2+x^2,$$

och således är

$$V=\frac{\pi x}{2}\left(a^2+y^2+\frac{x^2}{3}\right)=\pi a^2\cdot\frac{x}{2}+\pi y^2\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\pi x^3.$$

(Man jämföre denna härledning med de i våra vanliga läroböcker i rymdgeometri förekommande!)

För $c=r$ $\therefore\ a=0$ få vi *klotsegmentets* volym, och om därjämte $x=2r$ $\therefore\ y=0$, hela sfärens volym. *Klotsektorns* volym erhålles ur klotsegmentets genom addition av konen $\frac{1}{3}\pi y^2(r-x)$ (se fig. 4 å nästa sida) och blir således

$$S=\pi y^2\left(\frac{x}{2}+\frac{r-x}{3}\right)+\frac{1}{6}\pi x^3$$

eller, då nu $y^2=2rx-x^2$,

$$S=\frac{\pi}{6}\{(2rx-x^2)(2r+x)+x^3\}$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^2 x.$$

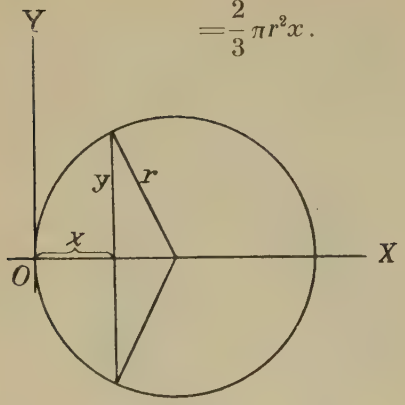


Fig. 4.

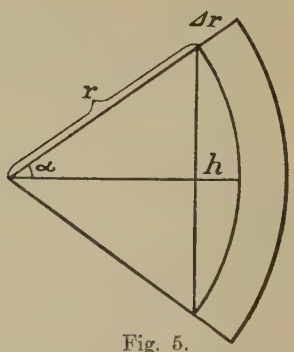


Fig. 5.

Tänker man sig nu som vanligt klotsektorn approximativt som summan av en mängd små pyramider, vilkas basytor tillsammans bilda kalottens yta Z och vilka alla ha sin spets i sfärens medelpunkt, så erhålles den vanliga formeln $Z=2\pi rh$. Men även här kunna vi använda derivationsmetoden: Vi utgå från en klotsektor med radien r och toppvinkeln 2α. Det motsvarande klotsegmentets höjd är då

$$h=r(1-\cos\alpha)$$

och klotsektorns volym

$$V=\tfrac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha).$$

Om med bibehållande av toppvinkeln radien får ett tillskott Δr, så erhålles

$$Z\,\Delta r<\Delta V<(Z+\Delta Z)\,\Delta r$$

och således

$$Z=\frac{dV}{dr}=2\pi r^2(1-\cos\alpha)=2\pi rh.$$

Genom subtraktion utsträckes sedan denna formel till att gälla för ytan av en sfärisk zon i allmänhet.

Om innebörden av Le Chatelier-Braun's princip.

Av CARL BENEDICKS.

1. Inledning.

I första bandet av *Zeitschrift für physikalische Chemie* ingingo — på föranstaltande av utgivaren, *Wilh. Ostwald* — två viktiga uppsatser av *H. Le Chatelier*[1] och *F. Braun*[2], vilkas allmännaste principiella innehåll sedermera vunnit spridning såsom »*Le Chatelier-Braun's princip*». Det torde jämte Wilh. Ostwald i främsta rummet vara *O. Chwolson*[3] som inriktat intresset på detta tema. Så förefinnes i hans allmänt erkända *Lehrbuch der Physik* beträffande ifrågavarande princip följande uttalande: »Kännedom därom borde vara spridd i högre grad än detta för närvarande är fallet, och framför allt borde principen bliva föremål för undervisning i *skolorna*, där den kunde ersätta den för skolorna ännu icke användbara (durchaus nicht reifen) andra huvudsatsen.»

I själva verket bereder emellertid principen betydliga svårigheter just vid skolundervisningen — där man å många håll har sökt efterkomma *Chwolsons* uppmaning — och man torde knappast kunna undgå den uppfattningen, att dessa svårigheter i främsta rummet bero på bristande precisering av principens giltighetsområde.[4]

[1] Zeitschrift f. phys. Chemie I, 565 (1887).
[2] Zeitschrift f. phys. Chemie I, 259 (1887).
[3] *Lehrbuch der Physik*, Bd. 3. Braunschweig 1905, S. 474.
[4] Förf. stöder sig därvid i första rummet på den erfarenhet, som vunnits av hans vän herr lektor O. Gallander, som i egenskap av redaktör vid denna tidskrift varit vänlig uppmana honom att här lämna en klargörande uppsats.

Vi skola här söka bidraga till frågans klargörande, och detta övervägande genom att behandla ett antal speciella fall, vilka i ett viktigt avseende komplettera de av *Chwolson* till stort antal anförda exemplen.

2. Chwolson's formulering av principen.

Vi inskränka oss till att börja med till den formulering av principen, som gives av *Chwolson*:

»Varje yttre påverkan framkallar i en kropp eller i ett system en förändring av sådan riktning, att på grund av denna förändring kroppens eller systemets motstånd mot den yttre påverkan förstoras».[1]

Chwolson formulerar principen ytterligare på följande mera preciserade sätt:

Den yttre orsaken åstadkommer en direkt ändring hos en viss parameter x, som är bestämmande för kroppens eller systemets tillstånd. Samtidigt ändrar sig en annan parameter y i sådan riktning att härigenom ändringen av parametern x, alltså den genom den yttre orsaken framkallade direkta verkan, blir förminskad.[2]

Vi skola nu övergå till en kritisk diskussion av några bland *Chwolson's* exempel och till behandling av några andra.

3. Kritisk behandling av ett antal exempel.

a. En stavs sträckning.

Chwolson's exempel 2 har avseende på en stavs sträckning. »Yttre orsak är ökningen av den sträckande kraften;

[1] »Jede äussere Einwirkung ruft in einem Körper oder einem System eine Änderung in solcher Richtung hervor, dass infolge dieser Änderung der Widerstand des Körpers oder des Systems gegen die äussere Einwirkung vergrössert wird». (Spärrat i originalet).

[2] »Die äussere Ursache bewirkt, dass ein gewisser Parameter x, der den Zustand des Körpers oder Systems bestimmt, einer direkten Änderung unterworfen wird. Zugleich ändert sich ein anderer Parameter y in solcher Richtung, dass hierdurch die Änderung des Parameters x, also die durch die äussere Ursache hervorgerufene direkte Wirkung, verkleinert wird.» (I originalet till större delen spärrat).

den direkt påverkade parametern x är trådens längd, l; andra parameter y är... temperaturen.»

I enlighet härmed förutsätter *Chwolson* en plötslig påkänning av staven. Emellertid är det fallet betydligt enklare, att påkänningen äger rum långsamt, så att temperaturen kan förbli konstant. Den andra parametern y är i så fall helt enkelt den uppstående inre spänningen eller motkraften hos staven. y ökar ju, *så snart elasticitetsgränsen icke överskridits*, proportionellt med förändringen av l (enl. Hook's lag: »Ut tensio sic vis»). Principen har alltså full giltighet.

Emellertid uppträda som bekant två nya möjligheter när den sträckande kraften ökas.

1. Staven undergår permanent förlängning (x). *Denna ändring av parametern x lämnar emellertid i detta fall icke någon ytterligare mot den yttre kraften riktad spänning y.*

2. Staven påverkas slutligen utöver brottgränsen och går följaktligen av. *Det kan då icke längre vara tal om att systemet utövar någon motkraft y.*

Det är uppenbart, att principen icke har någon giltighet för fallen 1 och 2. Redan detta exempel visar oss alltså, att giltigheten av principen förutsätter att man har att göra med stabila *jämviktstillstånd.* Denna såsom man lätt inser oundgängliga inskränkning har *Chwolson* märkvärdigt nog förbigått.

b. Pressade metalltrådar.

Det uppväckte på sin tid ett betydligt uppseende, när *Spring* och *Kahlbaum* konstaterade, att pressade metalltrådar i allmänhet besitta lägre spec. vikt än den opressade metallen, under det att man enligt Le Chatelier-Braun's princip skulle vänta motsatsen. Detta förhållande står i samband med det faktum, att vid utpressningen av en tråd genom ett munstycke icke något *stabilt jämviktstillstånd* förefinnes. Endast i det fall, att trycket vore ett verkligt allsidigt hydrostatiskt (som ej medförde någon deformation), kunde man hava att göra med ett stabilt jämviktstillstånd,

och då förekomme helt säkert den påfallande minskningen i spec. vikt icke längre.

c. Övergång från austenit till martensit.

I princip närbesläktad med föregående exempel är det följande. Vid tillräckligt hög halt av främmande ämnen (såsom nickel och mangan) bibehåller sig järnet vid vanlig temperatur som austenit, den fasta lösningen av γ-järn (som t. ex. ensam förekommer i Hadfield-stål med 13 % Mn). Om austenit utsättes för mekanisk påverkan inträffar lätt, att den övergår till martensit, som utgör en fast lösning av α-järn, utmärkt — jämte av stor hårdhet och hög ferromagnetism — även genom en *betydligt större spec. volym*. I själva verket befinner sig austenit (i ännu högre grad än martensit!) icke i någon stabil jämvikt; den ifrågavarande principen, som också i detta fall skulle föra till en minskning av volymen, kan därför icke här komma till användning.

d. Enantiotropi och monotropi.

Chwolson behandlar i sitt exempel 3 tvåfasiga system innehållande en komponent och framhåller för dylika principens användbarhet. Härtill måste emellertid anmärkas, att detta är riktigt i alla sådana fall där enligt *O. Lehmann's* beteckning *enantiotropi* förefinnes, d. v. s. i sådana fall, där de bägge faserna samtidigt existera stabilt vid en omvandlingstemperatur, men att det ingalunda gäller för sådana fall, där *monotropi* förefinnes, d. v. s. där vid alla tillgängliga temperaturer den ena fasen är stabilare än den andra.

Således gäller principen för det av *Chwolson* anförda tvåfasiga systemet rombiskt och monoklint svavel vid omvandlingspunkten (enantiotropi); den gäller däremot icke för systemet gul och röd fosfor eller för (det av 2 komponenter bestående) systemet cementit och grafit (där monotropi förefinnes).

Ett närliggande fall är *anlöpningen av härdat kolstål.* Vid värmetillförsel frigöres här av systemet en viss värmemängd, d. v. s. det latenta värme, som gör sig gällande vid uppdelningen av den fasta lösningen martensit i det kolloida systemet troostit, är här negativt, under det att enligt *Chwolson* latent värme ständigt måste vara positivt.

e. En substans' löslighet.

I *Chwolson's* exempel 9 heter det: »Låt en löslig kropp t. ex. ett salt bringas in i en ren vätska. Vilken temperaturändring äger då rum? Principen säger oss att temperaturändringen då äger rum i sådan riktning, att upplösning såvitt möjligt hindras — avkylningen äger rum.»[1]

Härtill måste anmärkas, att vid lösandet av en del salter — såsom t. ex. sulfaten av de sällsynta jordmetallerna, låt oss säga $Gd_2 3(SO_4)$ — uppvärmning inträffar.

Enligt *Chwolson's* exempel 10 fördelar sig en löslig kropp i ett fast—flytande tvåfasigt system ständigt så, att en del av den fasta fasen smälter.

Detta äger emellertid rum endas i det fall att den tillsatta kroppen är lösligare i den flytande fasen än i den fasta fasen, vilket ingalunda alltid behöver vara fallet. Om t. ex. till det tvåfasiga systemet *silver* vid smältpunkten en tillsättning av guld äger rum, fördelar detta sig så, att en del av smältan övergår till fast tillstånd. Guldet är nämligen lösligare i fast silver än i flytande silver (i systemet *Ag-Au* besitter den fasta fasen ständigt högre *Au*-halt än den flytande fasen!). Detta gäller fullt allmänt för varje kontinuerlig serie blandkristaller *(Roozeboom's typ 1)* vid tillsatsen av den substans, som har högre smältpunkt, till den, som smälter vid lägre temperatur.

Principen kan ju absolut icke utsäga något om frågan, huru lösligheterna förhålla sig i ett givet fall.

[1] »In eine reine Flüssigkeit werde ein löslicher Körper, z. B. ein Salz gebracht. Welche Temperaturänderung findet statt? Das Prinzip sagt uns, dass die Richtung der Temperaturänderung eine solche sein müsse, dass die Auflösung möglichst gehindert wird — es findet Abkühlung statt».

f. Elektromotorer.

Det finnes knappast något vackrare exempel på principens giltighet än den elektriska shuntmotorn: motorn löper stationärt vid en given yttre spänning; låt denna ökas, och därigenom strömstyrkan. Då inträffar en förändring (en viss ökning av varvantalet), som medför, att ökningen av strömstyrkan motverkas; i övrigt bibehålles ju ett stationärt rotationstillstånd.

I slående motsats därtill står emellertid en tomgående seriemotor, vars varvantal ju allt jämt ökar, ofta nog tills *självförintelse* av motorn inträffar.

g. Metalltråds-, resp. Nernst-lampa.

Låt en elektrisk ström flyta genom en *metalltråd*, och låt den yttre spänningen öka. Om då principen kan tillämpas, måste i tråden en förändring äga rum, så beskaffad, att den motverkar strömstyrkans tillväxt. Efter vad det förefaller, stämmer det bra överens härmed, att det elektriska motståndet ju ökar med stigande temperatur (positiv temperaturkoefficient).

Låt däremot den ledande kroppen vara en strömgenomfluten *Nernst-stav*. Höjes här den yttre spänningen, inträffar ju istället *en minskning av motståndet* (temperaturkoefficient negativ, liksom för kol) — vilken ju slutligen lätt leder till stavens nedsmältande.

Hur förhåller det sig i dessa bägge fall med principens giltighet?

För att klargöra detta måste vi först framhålla, att en strömgenomfluten ledare i och för sig ingalunda representerar något jämviktstillstånd. Saken är ju den, att temperaturen ständigt ökar på grund av Joule-värmet, såvida yttre värmeförluster ej förekomma. I själva verket inställer sig ett verkligt jämviktstillstånd i allmänhet därutinnan, att på grund av temperaturhöjningen ledaren per tidsenhet förlorar lika mycket värme genom strålning, konvektion etc.,

som den värmemängd som tillföres genom Joule-värmet. *På detta jämviktstillstånd* låter principen använda sig:

Den yttre orsaken medför, att *temperaturen* (»parameter x») undergår en direkt förändring. Samtidigt ändrar sig *utstrålningen* (»parameter y») på sådant sätt, att härigenom ändring av temperaturen (x) motverkas.

Detta utgör tvivelsutan en fullt korrekt användning av principen. Frågan angående det inre sammanhanget mellan den yttre orsaken (spänningsändringen) och temperaturändringen, d. v. s. frågan angående ledarens motståndsförändring, faller däremot helt och hållet utanför ramen av betraktelsesättet (i ännu högre grad är detta fallet med smälttemperaturen). Om man ville försöka taga hänsyn till temperaturförändringen hos det elektriska motståndet, vore det oundgängligt att också taga hänsyn till temperaturförändringarna hos den yttre strålningsförmågan.

h. »Vakuumkärl» med kolsvavlefyllning.

Låt oss tänka på ett av de i handeln befintliga dubbelväggiga »vakuumkärl», i vilka tomrummet är ersatt med kolsvavleånga. Vid avkylning av kärlets inre, tillströmmar ju dit, i främsta rummet genom konvektion i ångan, en värmemängd, som ju (i enlighet med principen) ökar med växande avkylning. Emellertid inträder vid fortsatt avkylning till sist ett *instabilt* tillstånd, då kolsvavleångan börjar kondensera sig, så att ett allt mera förbättrat vakuum uppstår: ju mera man kyler, desto *mindre* värme kommer då att tillföras från kärlets yttre del. För detta tillstånd har principen icke någon giltighet.

I ett av vatten genomflutet, utifrån upphettat metallrör inställer sig ju, vid svag uppvärmning, ett stationärt jämviktstillstånd, för vilket principen gäller. Vad som emellertid för tekniken är särdeles ovälkommet, är den omständigheten, att vid starkare upphettning ett tillstånd ofta nog av sig självt inträder, vid vilket ett dåligt ledande ångskikt förefinnes mellan metallröret och det strömmande vattnet:

i så fall äger genombränning av rörväggen ofta på kort tid rum, och principen äger ej giltighet.

i. Demonstrationsapparat för Peltiereffekt.

Låt oss tänka på en allmänt bekant apparat,[1] medelst vilken den Peltiereffekt, som äger rum vid beröringsstället mellan antimon och vismut demonstreras genom en lufttermometer, som tätt omsluter antimon-vismutstaven. Vid svag styrka hos den genomsända elektriska strömmen antager lufttermometerns vätskenivå stationärt, allt efter strömriktningen, ett högre eller lägre läge.

Om vi på detta system, som vi lätt finna vara verkligt stationärt, ville tillämpa principen, skulle vi kunna vara böjda att draga slutsatsen att förändringen av vätskenivån (y?) vore ägnad att motverka den av strömkastningen förorsakade ändringen av temperaturen (x). Man finner emellertid lätt att detta ingalunda är fallet, i det att en långsam förändring av vätskeståndet är utan inflytande och en hastig förändring har ett inflytande, motsatt det som i enlighet med principen skulle förefinnas.

I själva verket är lufttermometern här helt och hållet bisak, endast en index på temperaturtillståndet. Den förefintliga jämvikt, som förändras genom den yttre orsaken (strömmens omkastning), omfattar två parametrar: genom Peltier-effekt framkallad temperaturändring (x) och strålning, konvektion o. s. v. vid lödstället (y); därvid gäller detsamma som anförts under g.

4. Slutsatser.

a. Av de anförda exemplen kunna vi utan vidare sluta följande: Det är icke tal om att principen kan göra anspråk på någon allmän giltighet. I stället gäller den endast i sådana fall, där stabil jämvikt härskar. Det må framhållas,

[1] Se t. ex. *B. E. Warburg, Lehrbuch der Experimentalphysik*, 12. Auflage, Tübingen 1912, S. 380, Fig. 369.

att denna inskränkning gjordes redan av *Le Chatelier*[1] och även av *Braun.*[2]

Vi komma då till frågan om vad den egentliga innebörden är av den i enlighet härmed icke allmängiltiga »principen»?

Denna fråga synes mig knappast kunna besvaras annat än på ett sätt: *Den »Le Chatelier-Braunska principen» kan sägas utgöra kriteriet på stabil jämvikt.*

Fråga vi efter *definitionen* på ett stabilt jämviktstillstånd synas följande fyra moment oundgängliga; detta vare sig jämvikten faller inom mekaniken, fysiken, kemin eller den »allmänna tillståndsläran» (i enlighet med *J. R. Rydberg*).

1. Tillståndet måste vara oberoende av tiden, eller åtminstone kunna vara oberoende av tiden (smärre periodiska förändringar få icke genom definitionen uteslutas).

2. Tillståndet måste därvid vara föränderligt eller rörligt (en fastrostad vågbalk kan icke sägas befinna sig i jämvikt!).

3. Förskjutes tillståndet tillfälligtvis, återinställer det sig dock ånyo.

4. Detta återinställande måste vara oberoende av riktningen hos den tillfälliga förskjutningen.

I enlighet härmed kan en stabil jämvikt definieras såsom *ett av tiden oberoende rörligt tillstånd, som återinställer sig efter en tillfällig förskjutning av godtycklig riktning.*

Rörande *orsaken* till detta återvändande efter en tillfällig förskjutning utsäger nu den *Le Chatelier-Braun*ska principen, att förskjutningen i systemet framkallar en förändring, som påverkar detsamma i motsatt led. Vore detta icke fallet, är det uppenbart, att den stabila jämvikten icke kunde förefinnas.

Giltigheten av den *Le Chatelier-Braun*ska principen är sålunda villkoret för stabil jämvikt. Principen är med

[1] Anf. st.
[2] Anf. st.

andra ord icke någon allmängiltig naturlag, utan är kriteriet för stabil jämvikt — såsom ovan påstått.

Detta utesluter ju ingalunda, att principen under vissa omständigheter och såsom gränsfall kan hava karaktär av att vara en allmän naturlag. Vid ytterligt *höga temperaturer* kunna vi vid värmetillförsel icke vänta oss några andra processer än sådana, som äro förbundna med värmeupptagande d. v. s. som giva endoterma föreningar. Likaledes vid ytterligt *höga tryck:* vid tillräckligt stark sammantryckning kunna vi slutligen endast tänka oss sådana processer som äga rum under volym-minskning.

Således måste vid extremt höga värden på tillståndsvariablerna temperatur och tryck, åtminstone i enlighet med vår hittills varande erfarenhet, uteslutande stabila jämviktstillstånd vara möjliga, och i detta gränsfall torde principen kunna göra anspråk på allmängiltighet.

Vid måttliga temperaturer och måttligt tryck, som till exempel de vilka betinga det organiska livet, är det icke tal om någon uteslutande förekomst av stabila jämviktstillstånd, eller om någon allmängiltighet av »*Le Chatelier-Braun's* princip.»

b. Det har vid flera tillfällen framhållits, att den »*Le Chatelier-Braun*ska principen» kunde uppfattas som innebärande, att den döda materien gent emot yttre påverkan äger ett slags självbevarelse, eller *ackomodationsförmåga*, på samma sätt som ju dylik är karakteristisk för djur och växter.[1]

Därvid måste man emellertid anmärka, att en dylik ackomodationsförmåga ingalunda tillkommer samtliga organismer, utan endast sådana organismer, som utmärkas genom en viss »stabilitet», eller beständighet. Antag t. ex. att en organism eller art lever under givna yttre omständigheter, och att temperaturen sjunker. Då äro två fall möjliga:

1. Organismen ackomoderar sig;
2. Organismen dör ut.

Det ligger i sakens natur, att det senare fallet är långt

[1] Jämför t. ex. *Chwolson,* anf. st. S. 476.

mera sällan tillgängligt för iakttagelse än fallet 1, men, på alldeles samma vis som de icke stabila tillstånden i den oorganiska naturen icke få förbises, ehuru det ligger i sakens natur att de äro jämförelsevis sällsynta, få de icke heller förbises i den organiska naturen.

Vill man alltså framställa denna fråga — som delvis för över till filosofin — på ett korrekt sätt, kan det ske på ungefär följande sätt: Liksom man i de flesta för iakttagelsen tillgängliga fall i den organiska naturen kan uppfatta vissa företeelser som »självbevarelse» eller »ackomodationsförmåga» (som leder till en viss »stabilitet» hos bäraren) och endast jämförelsevis sällan kan observera fall av »självförstörelse» eller bristande ackomodationsförmåga, så gäller för den oorganiska naturen, att för det större antalet iakttagbara fall stabilitetsvillkoret är uppfyllt och att det endast i fall som mera sällan kunna iakttagas icke är uppfyllt.

c. Det har vid flera tillfällen påstått, att *Le Chatelier-Braun's princip* kan sägas utgöra en kvalitativ form av termodynamikens andra huvudsats. Detta förefaller mig vara en betydlig överdrift, men det skulle föra för långt att här ingå på denna fråga.

Sammanfattning.

1. En serie hittills mindre beaktade exempel — till stor del hämtade från metallografin — ha diskuterats, visande att den »*Le Chatelier-Braun*ska principen», såsom den av *Chwolson* formulerats, icke besitter allmängiltighet.

2. Principen kan istället uppfattas som ett *allmängiltigt kriterium på stabil jämvikt.*

3. Vid extremt höga temperaturer eller tryck måste principen tillerkännas en ökad giltighet.

Stockholm, Metallografiska institutet, december 1921.

Värmeteoriens andra huvudsats.

Framställd i gymnasiets andra ring.[1]

Av AD. MEYER.

I våra vanliga läroböcker i fysik förefinnes en betänklig brist, i det att värmeteoriens andra huvudsats därstädes alls ej är omnämnd. Förmodligen har den ansetts för svår för en populär framställning, och det är nog även förhållandet, att en i alla avseenden riktig och uttömmande framställning därav för skolstadiet näppeligen låter sig göra; men härvid gäller det, att något är bättre än intet och att man därför ej bör alldeles inhibera denna ytterst viktiga sats, utan söka få fram det viktigaste därav, även om framställningen ej skulle vara vetenskapligt fullkomligt oantastlig.

Emellertid förekommer hos Chwolson ett råd till lärarna, att, då man ej kan framställa satsen i dess helhet, begränsa sig till den konsekvens av densamma, som kallas *Chatelier-Browns princip* eller *status-quo-principen*, vilken hos honom uttalas på följande sätt:

Varje yttre inverkan framkallar i en kropp en sådan ändring, att i följd därav kroppens motstånd mot denna inverkan förökas;

vilket han sedan ytterligare preciserar till följande:

En yttre inverkan påverkar direkt en viss parameter x, av dem som bestämma en kropps tillstånd. Därigenom påverkas då en annan parameter y i sådan riktning, att förändringen av x förminskas.

Härpå anför han 18 exempel, av vilka vi anföra de 7 följande:

[1] Föreläsning hållen vid provårskursen d. 11 apr. 1922.

a) Volymen av en gas ökas plötsligt. Härvid avkyles den, och den lägre temperaturen motverkar utvidgningen.

b) En kropp tillföres värme så att den smälter. Kroppen motsätter sig denna förändring genom att konsumera energi i form av smältvärme.

c) En tråd förlänges genom uppvärmning. Sträckes den, sjunker dess temp. och härigenom motverkas förlängningen.

d) Stiger, såsom vanligt, lösligheten av ett ämne med temperaturen, så är lösningen förenad med temperatursänkning, ty genom temperatursänkningen motverkas lösningen; minskas däremot lösligheten med temperaturen, så sker upplösningen under temperaturstegring.

e) Om en elektrisk ström ledes genom ett lödställe, så uppstår därstädes en sådan temperaturförändring, att den härigenom uppkomna termoströmmen försvagar den ursprungliga strömmen.

f) Ledes en elektrisk ström medelst platinaelektroder t. ex. genom svavelsyra, så motverkas strömmen av den uppkomna polarisationen.

g) Om en kropps volym ökas vid smältning, så höjes smältpunkten vid ökat tryck, minskas volymen så sänkes smältpunkten vid ökat tryck.

Mot exemplet *a*), en gas' avkylning genom volymförökning torde nog kunna anmärkas, att detta helt är beroende av om gasen uträttar arbete eller ej, och att vi således här egentligen hava ett exempel på första, ej på andra huvudsatsen, men de övriga exemplen torde nog visa rätt.

Emellertid blir principen i denna form föga användbar, ty man vet ej vilken av de oändligt många parametrarna som bestämma en kropps tillstånd, som skall tagas till y.

Låtom oss taga några exempel:

1) Förminskning av volymen hos en gas frambringar ökning ej blott av temp. utan även av trycket. Detta sista vore ensamt nog för »status quo». Varför skall då just temp. ökas? Med andra ord: Hur vet man att just temperaturen är den parameter y som kommer att ändras?

2) Om en tråd sträckes, så är tydligen längden parametern x, tages då i stället för temperaturen genomskärningsytan till y, så skulle denna ökas för att motverka förlängningen, men i själva verket minskas den, vilket *underlättar* sträckningen.

3) Om en elektrisk ström ledes genom en tråd, så borde denna enligt status-quo-principen uppvärmas eller avkylas allt eftersom ledningsmotståndet ökas eller minskas med stigande temperatur. Så är, som bekant, ej förhållandet t. ex. vid Nernstlampan.

4) Att, för inledande av en vanlig exotermisk kemisk förening, värme måste tillföras, strider likaledes mot lagen, ty den kemiska föreningen upphäver ej, utan befordrar värmeutvecklingen. Egentligen borde jag enligt status-quo-principen kunna tända på ett stycke kol genom att *avkyla* detsamma.

5) En gnista som slår över mellan två konduktorer borde förtäta luften mellan dem och sänka temperaturen.

6) Om en klangbotten träffas av vibrationer så skulle den uppdela sig så, att vibrationerna snarast möjligt upphörde. o. s. v.

I övrigt hänvisas till prof. Benedicks' uppsats i detta häfte om Chatelier-Browns princip och dess giltighetsområde.

Vi se således, att status-quo-principen, hur den än formuleras, likväl i många fall leder vilse, och ger för resten föga begrepp om själva huvudtanken i den andra huvudsatsen. I detta avseende förefaller det mig som om man komme betydligt längre och angrepe satsen på en betydligt centralare punkt med »lagen om energiens försämring» (»arbetets dekadans» som The Svedberg uttrycker det).

Denna princip har jag nu i c:a 30 år framställt i andra ringen, och funnit att lärjungarna, trots många oundvikliga brister i framställningen, på det hela fattat den ganska väl. Jag har därför ansett att det ej skulle vara alldeles utan nytta att för lärare och provkandidater giva en redogörelse för min framställning, varvid naturligen sedan var och en

kan göra de ändringar i framställningssättet, som han finner lämpligt, detta desto mer som jag ej hört att någon lärare begagnat sig av en snarlik.

*

I den första huvudsatsen hava vi sett, att bestämda kvantiteter av de olika slags energierna äro ekvivalenta, att t. ex. 1 kgkal kan utbytas mot 427 kgm och tvärtom, eller en kwtimme mot 864 kgkal, ungefär på samma sätt som en hundrakrona kan utväxlas mot 100 en-kronor.

Men, om de också äro ekvivalenta, så är därmed ej säkert att de alltid kunna utbytas mot varandra utan förlust, på samma sätt som jag stundom nödgas betala något för att få en 100-krona växlad i 100 enkronor, om dessa vid något tillfälle äro nyttigare för mig.

Jag utgår då från ett tänkt experiment, som är min utgångspunkt redan vid behandlingen av första huvudsatsen:

Jag tänker mig en kropp vägande 1 kg upphängd på en tråd i taket, låt oss säga 3 m över golvet. Den äger då en lägesenergi av 3 kgm. Om då tråden avklippes, så faller kroppen, d. v. s. en del av dess lägesenergi försvinner och utbytes under fallet så småningom mot rörelseenergi till lika belopp. Just i det ögonblick då den skall träffa golvet är hela dess lägesenergi förvandlad till rörelseenergi: när den då stöter mot golvet, så kunna tre fall tänkas inträffa: antingen 1) är den fullständigt elastisk. Då växlar endast hastigheten tecken, och rörelseenergien $\frac{mh^2}{2}$ behåller sitt värde för att så småningom i sin helhet övergå till lägesenergi, så att kroppen slutligen uppnår sitt förra läge och därstädes får rörelseenergien $= 0$, varefter samma förlopp ånyo upprepas; eller 2) är den fullständigt oelastisk. Då övergår vid stöten hela rörelseenergien fullständigt i värmeenergi; eller 3) är den delvis elastisk, och, väl att märka, detta är *det enda fall som i verkligheten förekommer.* Då bibehålles blott en del av rörelseenergien

för att övergå till lägesenergi, under det att den övriga delen omsättes i värme. Sedan den förstnämnda delen med större eller mindre förluster förvandlats i lägesenergi, upprepas förloppet med denna del, till dess att slutligen hela den ursprungliga energien övergått till värme. Det härvid utvecklade värmet, som från början var samlat på en liten punkt, övergår sedan genom ledning och strålning av sig självt från denna till allt större områden, varvid dess temperatur minskas, under det att dess kvantitet cmT naturligen enligt första huvudsatsen bibehålles.

Redan härav se vi, att en energiomsättning kan försiggå *totalt* och *av sig själv* i en viss riktning, men endast *delvis* (och vanligen genom yttre påverkan) i den motsatta.

Men när för oss tydligen den energiform är värdefullast, som lättast och med minsta förlust kan förvandlas till andra arter, så inse vi att *samma kvantitet* energi kan allt efter sin art hava större eller mindre *värdefullhet*. Vi säga därför att en värdefullare art av energi kan fullständigt och av sig själv övergå i en lägre form, men att, då den lägre formen skall förvandlas till en högre, så kan detta i allmänhet endast ske på omvägar och alltid på sådant sätt, att energiförrådet uppdelar sig så att av ett förefintligt energiförråd visserligen en del transformeras till en högre art, men då måste samtidigt även en annan del därav övergå till en ännu lägre.

Vi kunna således uppställa följande tabell, där varje föregående led är värdefullare än det följande:

Lägesenergi.
Rörelseenergi.
Värme av högre temperatur.
Värme av lägre temperatur.

Här se vi genast, att t. ex. lägesenergi utan vidare kan övergå, t. ex. genom fritt fall, till rörelseenergi, och när denna t. ex. genom en stöt eller genom friktion förintas, så uppkommer värme; eller att t. ex. genom ledning eller strålning värme kan gå från en varmare kropp till

en kallare, men skall man t. ex. genom en ångmaskin transformera upp värme till arbete, så måste en del av ångpannans värme, som ju har hög temperatur, samtidigt övergå till den lägre temperaturen i kondensorn eller i luften. Vi kunna därav även härleda den s. k. Thomsonska lagen, att om man har en samling värmekällor av olika temperaturer, så kan aldrig ur den lägsta av dessa någon energi utvinnas, ty då skulle ju nödvändigt en del av dess värme övergå till en kropp med ännu lägre temperatur, vilken ju enligt antagandet ej förefinnes.

Härav följer då även omöjligheten av ett termiskt perpetuum mobile, då all energi i naturen strävar att så småningom förvandlas till utbrett värme, och vi komma till det resultat, att världen slutligen kommer att undergå den s. k. »värmedöden», då alla temperaturdifferenser äro upphävda och således alla energiförvandlingar äro uteslutna.

Nu är det visserligen sant, att Arrhenius uppställt en teori, enligt vilken inom de ytterst förtunnade gasmassor, som vi kalla nebulosor, det utbredda värmet åter skulle kunna förvandlas till värme av högre temperatur och dymedelst även till andra arter av energi; men därvid böra vi komma ihåg, att den mekaniska värmeteoriens andra huvudsats endast är en helt empirisk sats, vars giltighet vi endast kunna konstatera inom det för våra undersökningar tillgängliga området av världsrymden, och som vi därför ej hava någon rättighet att utsträcka till nebulosorna. Om vi således vilja acceptera Arrhenii teori, så skulle vi komma till den slutsatsen, *att det i världsalltet endast finnes ett enda perpetuum mobile, och detta är världsalltet självt.*

På tal om samlat och utbrett värme kan man även göra en, åtminstone för lekmannen, ganska träffande jämförelse på det nationalekonomiska området, även om den ej fullt skulle gillas av en nationalekonom ex professo: Om en man äger 100,000 kronor, så är intet lättare än att »slösa bort» detta kapital, d. v. s. dela ut det i småpor-

tioner om 1, 10, 100 eller 1 000 kr., men att däremot från personer som äga dylika summor åter hopsamla ett kapital av 100 000 kr. är en svår konst, som aldrig låter sig göra utan att en del därav splittras bort i ännu mindre summor t. ex. genom annonser och i allmänhet allt som brukar sammanföras under titeln »organisationskonto» i en affär. Vi kunna t. ex. tänka på alla de omkostnader som fordras vid bildandet av ett större aktiebolag med många små delägare; och icke desto mindre är hopsamlandet av dessa småsummor till ett stort kapital en stor nationalekonomisk vinst, ty det stora kapitalet är en »energiform» av högre värde än småsummorna, på samma sätt som samlat värme eller rörelseenergi är värdefullare än utbrett värme av låg temperatur. Aktiebolaget är således jämförligt med t. ex. en ångmaskin eller en vindmotor: det upptransformerar (ehuru med förluster) en lägre energiform till en högre. Det torde även vara otvivelaktigt, att ett samhälle där alla vore lika rika eller lika fattiga, så att ingen kunde köpa den andras tjänster och ej heller någon fick sträva efter att förvärva mer än den andra, vore ungefär likbetydande med »värmedöden» för detta samhälle: det kunde nog till en tid vegetera, men med all företagsamhet vore det slut. Jag tror att våra socialister allt för ofta förbisett denna sanning, på vilken vi dock nu i Ryssland hava ett talande exempel.

*

Hittills hava vi blott talat om mekaniska och termiska energiformer, där saken är mest utredd. För att systemet skall bliva fullständigt bör nu även i detsamma inrangeras de kemiska, elektriska och magnetiska energierna, men härvid hopa sig svårigheterna allt mer. Redan mot vår uppställning på sid. 5 kan en anmärkning göras, nämligen att rörelseenergien i ett visst specialfall kan fullständigt övergå i lägesenergi, nämligen då hastigheten är riktad rätt uppåt och rörelsen försiggår i tomrummet. Detta är

dock blott ett gränsfall, som väl ej torde förefinnas i verkligheten, så att mot denna uppställning knappast någon verkligt befogad anmärkning kan göras; men när man i densamma försöker inrangera övriga energier, stöter det på allt fler svårigheter, så att uppställningen blir långt ifrån korrekt; men icke desto mindre tror jag att följande anordning dock skall giva ett visst begrepp om den andra huvudsatsens innebörd:

Lägesenergi.
Rörelseenergi.
Kemisk energi.
Elektrisk energi av högre potential.
» » » lägre »
Magnetisk energi.
Värme av högre temperatur.
» » lägre »

Naturligtvis får man ej underlåta att påpeka de många och stora bristerna i denna uppställning, såsom t. ex. att det medför ungefär lika stora förluster att transformera högspänd ström till lågspänd som tvärtom; att åstadkommande av en magnet genom elektrisk ström ej heller kan ske utan energiförlust o. s. v., men man bör även påpeka, hur t. ex. elektricitet av högre potential, uppsamlad på en konduktor av sig själv övergår till elektricitet av lägre potential, då konduktorerna ställas i ledande förbindelse, men den motsatta gången är omöjlig; hur kemisk energi i vissa staplar så gott som fullständigt förvandlas till elektricitet; hur elektrisk energi kan fullständigt förvandlas i värme, men endast delvis i kemisk eller rörelseenergi o. s. v.

Trots alla dess brister synes mig därför en dylik framställning vara den som bäst är ägnad att giva skolans alumner en inblick i den mekaniska värmeteoriens andra huvudsats, och nog har det alltid synts mig, att den både kan fattas av dem och intresserar dem.

Om variationerna i de enligt Langleys metod beräknade solarkonstanterna.

Av GUSTAF GRANQVIST.

I Svenska Fysikersamfundets årsskrift Kosmos 1920 har jag offentliggjort en uppsats över solens strålning och i densamma bland annat uppvisat, att de beräknade värdena på solarkonstanten såväl på Mount Wilson som i Uppsala visa en gång i förhållande till atmosfärens transmissionskoefficienter på så sätt, att ju större dessa senare varit under observationsdagen desto mindre värden hava erhållits på den beräknade solarkonstanten och vice versa. Jag har på grund härav uttalat den åsikten, att det Langleyska förfaringssättet, vilket användes vid bestämningar av solarkonstanten, icke eliminerar atmosfärens absorberande inverkan på beräkningen av solstrålningen, samt att därför de av Abbot funna stora variationerna i solarkonstanten icke äro reella.

I Tidskrift för elementär mat., fysik och kemi, årg. 5, h. 2, har emellertid docenten A. Ångström sökt försvara den Abbotska teorien samt förklara den ovannämnda gången i de beräknade solarkonstanterna i förhållande till transmissionskonstanterna genom det antagandet, att solstrålningen ändrats under observationstiden. Att denna hypotes icke kan godtagas skall i det följande visas.

Innan jag övergår till granskningen av doc. Ångströms hypotes, vill jag likväl först erinra om några resultat, beträffande solarkonstanten, erhållna medelst den Langleyska metoden.

Med denna metod hava som bekant bestämningar av solarkonstanten utförts först av Langley själv, därefter av Abbot, dels i Washington under åren 1902—1907, dels på

Mount Wilson från och med år 1905. Hittills äro förutom Washingtonobservationerna de som utförts å Mount Wilson under åren 1905—1911 offentliggjorda. Det värde, som erhållits på solarkonstanten har varit ganska olika dag från dag. Fig. 1, som är tagen ur Smithsonian Institutionens annaler Vol. III, visar huru de beräknade solarkonstanterna varierat under observationsterminen 1910. Variationerna under de övriga offentliggjorda åren äro i huvudsak liknande, och det torde därför vara onödigt att medtaga dem här. De flesta beräknade solarkonstanterna i fig. 1 gruppera sig omkring ett medelvärde på 1,92, men stundom

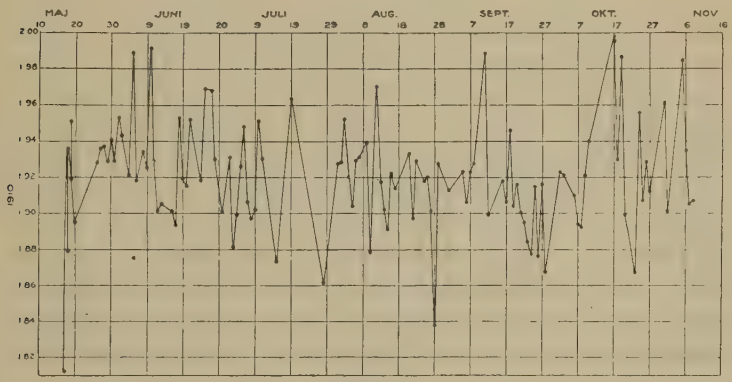


Fig. 1.

förekomma stora avvikelser från detta medelvärde. Abbot är nu av den åsikten, att dessa variationer i de beräknade solarkonstanterna icke bero av observationsfel eller på förändringar i atmosfären under observationstiden utan därpå, att strålningen från solen själv förändras. Om denna slutsats är riktig, skulle solstrålningen, som framgår av fig. 1, vara underkastad plötsliga, oregelbundna variationer i genomsnitt uppgående till 7 à 10 % av medelstrålningen. Stundom har Abbot i dessa variationer trott sig finna en period av 7—10 dagar. Som ytterligare stöd för sin åsikt har Abbot anfört de mätningar av solarkonstanten, som samtidigt utförts å Mount Wilson och i Bassour, vilka

enligt Abbot visa en parallell gång. Jag har utförligt i min uppsats i Kosmos redogjort, varför jag icke anser dessa mätningar bevisa en sådan parallell gång, och hänvisar till densamma.

I min uppsats i Kosmos har jag framhållit Guthnicks och hans medhjälpare Pragers undersökningar över planeten Saturnus' ljusstyrka under åren 1914—1915 och 1917—1918, vilka jag anser i detta sammanhang vara av största betydelse. Dessa synnerligen omsorgsfulla mätningar äro utförda medelst en ljuselektrisk metod, varvid Saturnus' ljusstyrka jämförts med en nära intill densamma belägen fixstjärnas, vilkens ljusstyrka man vet vara konstant. Härigenom har atmosfärens absorption eliminerats. Sedan fasens inflytande på ljusstyrkan eliminerats, visade sig planetens ljusstyrka inom $\pm 1\,\%$ konstant. Då Saturnus erhåller sitt ljus från solen, måste även dennas strålning inom samma gränser vara konstant. Anmärkas bör, att vid den ljuselektriska metoden kommer endast spektralområdet $0{,}35-0{,}55\,\mu$ till användning, under det att vid bestämningen av solarkonstanterna området $0{,}37-2{,}8\,\mu$ användes, men enligt hittills gjorda iakttagelser tilltaga variationer i ljusstyrkan av detta slag med avtagande våglängd, vilket även Abbot trott sig hava funnit i solens strålning. Guthnicks iakttagelser stå sålunda i fullkomlig strid mot Abbots, och Guthnick har uttalat som sin åsikt, att de i Nordamerika och Algier funna variationerna i solstrålningen med stor sannolikhet bero på »Durchlässigkeitsschwankungen» i jordatmosfären.

I Kosmos har jag givit en schematisk framställning av den Langleyska metoden och det torde därför vara onödigt att här närmare ingå på densamma. Låt i_0 vara intensiteten utanför atmosfärens gräns av strålningen av våglängden λ, så är solarkonstanten lika med

$$\varkappa \int_0^\infty i_0 d\lambda,$$

varest $\varkappa$ är en faktor, medelst vilken solarkonstanten reduceras till det värde den skulle hava, om jorden befann sig

på sitt medelavstånd från solen. Vid bestämningen av i_0 utgår Langley bland annat från de antaganden, att samtliga i_0 och alltså även solarkonstanten icke förändras under den tid (3 à 6 timmar), som erfordras för anställandet av observationerna, och att atmosfären kan tänkas uppdelad i en serie med jorden koncentriska skikt, av vilka varje kan betraktas som homogent inom det område, som beröres av observationerna och under observationstiden, samt att den Bouguerska exponentiallagen kan tillämpas på dessa skikt. Den Bouguerska lagen lyder i detta fall

$$i_z = i_0 \beta^z,$$

varest z betecknar den av solstrålarna genomgångna luftmassan uttryckt i enheter av luftmassan i zenit. I det följande vilja vi kalla z för den genomstrålade skikttjockleken. β äro atmosfärens transmissionskoefficienter för de homogena strålarna av våglängden λ och i_z dessa strålars intensitet, då det genomstrålade skiktet varit z.

Intensiteterna uppmätas i allmänhet medelst en spektrobolometer. Deras värden kunna där icke absolut bestämmas utan endast relativt i förhållande till varandra. De skola alltså samtliga multipliceras med en och samma faktor, vilken, som jag visat i uppsatsen i Kosmos, erhålles genom samtidig uppmätning av den totala strålningen med en absolut pyrheliometer och registrering av den relativa energistrålningen i solspektrum. Låt denna faktor betecknas med ϱ. De å bolograminen uppmätta intensiteterna skola vidare korrigeras för förlusterna i bolometern och speglarna framför densamma, vilka bestämmas experimentellt, samt slutligen för atmosfärens selektiva absorption på sätt jag omnämnt i Kosmos. Låt I_z vara de för den selektiva absorptionen korrigerade intensiteterna, så är

$$i_z = \frac{\varrho \cdot I_z}{b_\lambda},$$

varest b_λ är förlusterna i bolometern med speglarna för våglängderna λ. Vidare är, om vi med S beteckna solar-

konstanten

$$S = \varkappa \cdot \varrho \cdot \int_0^\infty \frac{I_0}{b_\lambda} d\lambda,$$

samt enligt den Bouguerska lagen

$$I_z = I_0 \cdot \beta^z.$$

Mellan $\mathrm{Log}\, I_z$ och z äger således en lineär relation rum, varför $\mathrm{Log}\, I_0$ kan grafiskt bestämmas och följaktligen även I_0.

Fig. 2 må vara ett dylikt diagram och låt linjen AB vara den funna relationen mellan $\mathrm{Log}\, I_z$ och z. Sidan OA är då lika med $\mathrm{Log}\, I_0$ och $\mathrm{tang}\, \varphi$ lika med $-\mathrm{Log}\, \beta$. Transmissionskoefficienterna äro huvudsakligen beroende av den utströende verkan på solstrålningen, som orsakas av luftmolekylerna, stoftpartiklar och vattenpartiklar i atmosfären. Nu har Fowle visat, att på Mount Wilson, varest han undersökt transmissionskoefficienterna för 180 dagar fördelade på åren 1911 och 1912, dessa kunna sättas under formeln $a_\lambda = a_{a\lambda} a_{w\lambda}^w$, varest $a_{a\lambda}$ är transmissionskoefficienten för våglängden λ för den torra atmosfären. Dennas storlek beror endast av antalet luftmolekyler och är alltså konstant. $a_{w\lambda}$ är en faktor, som anger ändringen i transmissionskoefficienten, om i atmosfären finnes 1 cm utfällbart (precipitable) vatten i form av vattenånga fördelad längs en vertikal pelare i densamma samt w djupet av denna vattenånga, om den vore kondenserad till vätska. Om w ändras från 0 till 2 cm, vilket ungefär motsvarar det högsta värdet på w på Mount Wilson, så ändras faktorn $a_{w\lambda}^w$ med 9,2 % för våglängden 0,37 μ och med 2,5 % för våglängden 1,5 μ. För mellanliggande våglängder ligga variationerna mellan dessa värden. Då nu vattenångan huvudsakligen finnes i atmosfärens lägre lager, äro förändringarna därstädes de, som i allt väsentligt bestämma variationerna i transmissionskoefficienterna. Fuktighetsgraden vid jordytan är som bekant starkt beroende av insolationens styrka. En undersökning av observationerna vid Mount Wilson visar emellertid icke något påtagligt samband mellan fuktigheten vid jordytan och mängden utfällbart vatten i atmosfären, vilket visar,

att andra faktorer än insolationen antagligen vindförhållanden m. m. spela en avgörande roll härvid.

Enligt Fowle är den utströende verkan, som orsakas av det i atmosfären befintliga utfällbara vattnet, många gånger större än den, som skulle erhållas, om de här verkande partiklarna vore vattenmolekyler. Denna utströende verkan är emellertid icke blott beroende av antalet partiklar utan även av deras volym och växer med denna. Fowle uttalar därför den förmodan, att atmosfären ioniseras av det ultravioletta ljuset från solen, varvid kondensationskärnor kunna bildas för vattenångan. Det är nu visserligen sant, att i de högsta luftlagren, varest det ultravioletta ljuset absorberas, detta är den viktigaste ionisatorn, men i de lägre lagren, varest vattenångan finnes, utgör den från jordytan utgående radioaktiva emanationen, dess sönderdelningsprodukter och den s. k. genomträngande strålningen den viktigaste ionisatorn. Då nu denna är oberoende av solstrålningen, finnes intet skäl att antaga, att en plötslig ändring av solarkonstanten av sådant slag, som Abbot funnit, skulle åstadkomma samtidigt en motsvarande ändring av transmissionskoefficienterna. Dessa senares och solarkonstanternas variationer bliva då oberoende av varandra. Härav framgår, att om de Langleyska villkoren äro uppfyllda (konstant solstrålning och konstanta transmissionskoefficienter under observationstiden), böra även de beräknade solarkonstanterna och transmissionskoefficienterna vara oberoende av varandra.

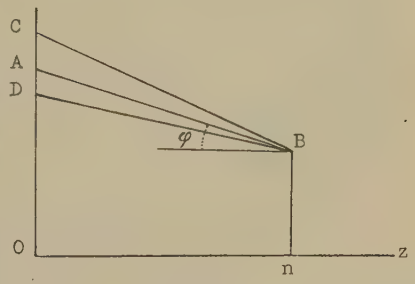


Fig. 2.

Jag vill nu antaga, att någon slags felkälla förefunnits vid observationerna, så att vi i stället för den riktiga linjen *AB* erhållit t. ex. någon av linjerna *CB* eller *DB* (fig. 2). I förra fallet bliva intensiteterna I_0 för stora och följaktligen

solarkonstanten för stor under det att transmissionskoefficienten blir för liten. I senare fallet äger det motsatta förhållandet rum. Då nu, som vi förut visat, solarkonstanterna och transmissionskoefficienterna böra vara oberoende av varandra, om de Langleyska villkoren äro uppfyllda, så är det tydligt, att detta icke varit förhållandet, om man finner att observationsmaterialet är sådant, att ju större solarkonstanterna blivit desto mindre äro de erhållna transmissionskoefficienterna. Detta är emellertid just det jag funnit såväl beträffande observationerna i Uppsala som de på Mount Wilson och i Washington. I min uppsats i Kosmos har jag nämligen visat, att om man uppdelar de beräknade solarkonstanterna i grupper t. ex. på så sätt att de solarkonstanter, som ligga mellan 2,1 och 2,0 sammanföras till en grupp, de som ligga mellan 2,0 och 1,9 till en annan o. s. v. och tager mediet av transmissionskoefficienterna inom varje grupp, så finner man, att ju större de beräknade solarkonstanterna äro desto mindre äro transmissionskoefficienterna. Som exempel härpå hade jag anfört i min uppsats mätningarna i Uppsala åren 1912—1915, 1919 samt de på Mount Wilson 1911 men tillagt, att om en liknande undersökning göres över övriga mätningar på Mount Wilson, kommer man till samma resultat. Då doc. Ångström i sin uppsats synes vilja förneka denna gång i transmissionskoefficienterna, skall jag här nedan meddela mina undersökningar över samtliga hittills offentliggjorda mätningar såväl i Washington, i Uppsala och på Mount Wilson.

Transmissionskoefficienter.

(Samtliga koefficienter äro multiplicerade med 1 000.)

Tab. 1. Washington.

1903—1907.

Grupp	Antal	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,20	1,60μ	E'_0
$<1{,}90$	11	564	645	710	*758*	835	868	*887*	903	913	925	1,823
1,90—2,05	16	528	644	707	770	833	868	889	898	908	923	1,974
$>2{,}05$	10	491	601	662	721	795	839	866	888	907	916	2,111
$\frac{d\beta}{\beta}$ %		13,8	6,83	6,80	4,80	4,80	3,34	2,36	1,67	0,66	0,98	

Tab. 2. Mount Wilson.

1905.

Grupp	Antal	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,20	1,60μ	E'_0
$<1{,}90$	7	*733*	*809*	*856*	*907*	944	964	976	980	983	985	1,884
1,90—1,95	23	742	812	861	910	944	961	970	974	979	983	1,926
1,95—2,00	22	730	801	845	897	934	955	965	970	974	977	1,974
$>2{,}00$	7	704	781	826	887	924	947	960	967	973	*979*	2,028
$\frac{d\beta}{\beta}$ %		3,94	3,47	3,52	2,21	2,13	1,77	1,65	1,34	1,03	0,61	

1906.

$<1{,}90$	6	751	823	865	913	946	962	972	975	979	983	1,884
1,90—1,94	19	748	817	857	907	940	956	965	970	974	979	1,920
1,94—1,98	28	746	812	852	902	935	951	961	967	972	978	1,954
$>1{,}98$	9	728	796	839	889	919	936	946	952	957	962	1,998
$\frac{d\beta}{\beta}$ %		3,08	3,32	3,04	2,65	2,88	2,73	2,70	2,38	2,26	2,15	

1908.

$<1{,}92$	23	716	801	847	*878*	931	949	957	959	*963*	969	1,904
1,92—1,94	27	712	795	846	879	926	949	956	958	964	967	1,931
1,94—1,96	31	710	792	839	871	922	942	954	955	956	960	1,948
1,96—1,98	21	692	781	823	861	910	932	943	945	946	954	1,970
$>1{,}98$	12	672	756	810	847	900	924	936	937	938	948	1,997
$\frac{d\beta}{\beta}$ %		6,20	5,68	4,41	3,56	3,36	2,65	2,20	2,31	2,62	2,19	

1909.

Grupp	Antal	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00	1,20	1,60μ	E'_0
$<1{,}85$	3	*635*	744	823	876	906	952	972	982	972	980	1,811
1,85—1,90	31	652	742	817	866	897	944	959	971	970	977	1,880
1,90—1,95	46	621	729	810	856	888	938	958	967	966	971	1,923
1,95—2,00	14	*623*	*730*	800	*858*	888	938	957	965	963	*973*	1,965
$>2{,}00$	2	*649*	*736*	784	840	876	911	934	935	932	955	2,013
$\frac{d\beta}{\beta}$ %				4,82	4,20	3,38	4,37	3,97	4,86	4,14	2,58	

1910.

1,80—1,85	3	665	759	*807*	*872*	909	954	972	*980*	*976*	*967*	1,826
1,85—1,90	21	641	740	*819*	874	*903*	948	970	982	982	*979*	1,885
1,900—1,925	41	638	735	820	874	905	*953*	*973*	982	979	984	1,912
1,925—1,950	29	616	726	811	867	898	946	969	976	974	973	1,933
1,95—2,00	18	597	723	801	858	892	941	959	970	970	*978*	1,969
$>2{,}00$	1	—	708	780	828	851	908	923	946	924	913	2,123
$\frac{d\beta}{\beta}$ %		10,6	6,99	3,31	5,06	6,44	4,84	5,05	3,47	5,33	3,68	

1911.

Grupp	Antal	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00	1,20	1,60μ	E'_0
1,80 —1,85	2	633	757	833	884	922	967	981	*979*	988	988	1,847
1,85 —1,90	20	631	*742*	827	882	906	958	980	987	981	988	1,885
1,900—1,925	35	*639*	746	822	876	903	957	974	980	978	980	1,912
1,925—1,950	35	625	738	820	870	900	945	970	978	975	977	1,937
1,95 —2,00	17	604	725	796	857	888	941	958	970	971	976	1,969
>2,00	4	575	681	765	827	867	918	945	956	943	947	2,031
$\frac{d\beta}{\beta}$ %		9,18	10,2	8,29	6,53	6,11	5,15	3,71	2,35	4,61	4,19	

Tab. 3. Uppsala.

1912—1915.

Grupp	Antal	0,51	0,53	0,55	0,58	0,60	0,63	0,67	0,76	0,83	1,04	1,56	2,68	3,59μ	E'_0
<1,8	3	856	864	881	881	896	909	933	947	958	983	995	965	926	1,708
1,8—1,9	5	848	845	868	866	872	886	908	936	951	979	990	962	926	—
1,9—2,0	12	801	798	807	804	832	851	861	898	913	937	952	917	897	1,951
2,0—2,1	8	745	746	753	760	771	790	816	859	880	909	950	*927*	880	—
>2,1	4	*747*	*753*	752	*765*	*772*	779	816	856	*887*	909	931	856	841	2,141
$\frac{d\beta}{\beta}$ %		13,6	13,9	16,0	14,4	14,9	15,3	13,6	10,1	7,78	7,90	6,72	11,9	9,48	

1919.

Grupp	Antal	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00μ	E'_0
<1,80	1	825	*864*	936	956	969	975	1,780
1,80—1,90	2	825	868	932	956	963	967	1,879
1,90—1,95	4	793	849	909	942	957	965	1,924
1,95—2,00	5	*795*	823	894	929	944	952	1,978
>2,00	3	702	771	823	868	893	906	2,185
$\frac{d\beta}{\beta}$ %		15,5	10,9	12,4	9,35	7,95	7,15	

1920.

Grupp	Antal	0,49	0,50	0,51	0,52	0,54	0,57	0,67	0,70	0,76	0,91	0,99	1,23	1,65μ	E'_0
1,8—1,9	2	*804*	810	818	824	837	854	915	920	939	975	984	992	*960*	1,868
1,9—2,0	3	805	810	817	823	832	844	899	915	936	970	974	983	982	1,954
2,0—2,1	7	758	771	778	783	794	804	868	883	903	946	952	964	971	2,038
>2,1	2	718	723	727	735	750	774	848	858	894	928	939	955	956	2,144
$\frac{d\beta}{\beta}$ %		11,0	11,0	11,4	11,1	10,6	9,71	7,58	6,90	4,90	4,90	4,67	3,80	0,41	

Av tabellerna framgår, som ovan nämnts, att då transmissionskoefficienterna varit små, de beräknade solarkonstanterna blivit stora och tvärt om. De transmissionskoefficienter, som härutinnan göra ett undantag, äro tryckta

med kursiverade siffror. Av samtliga 476 i tabellerna införda transmissionskoefficienter tillhöra endast 39 denna senare kategori. Härvid är dessutom att observera, att en stor del av dessa tillhöra grupper, där antalet solarkonstanter varit högst få och transmissionskoefficienternas medium därför osäkert.

Under varje tabell är infört ändringen i transmissionskoefficienterna i procent av medelvärdet, då solarkonstanterna ändrats från sitt högsta till sitt minsta värde och i tabellen betecknad med $\frac{d\beta}{\beta}$. Vi se, att denna procentiska ändring är störst för de minsta våglängderna och minst för de långa våglängderna. Detta inträffar såväl i Washington, på Mount Wilson som i Uppsala.

Då nu de beräknade solarkonstanterna visa samma beroende av transmissionskoefficienterna och den procentiska ändringen av dessa senare samma beroende av våglängden på alla tre ställena, måste man därav sluta, att orsaken till detta förhållande är detsamma vid alla tre observationsorterna och icke som doc. Ångström söka *en* förklaring till detsamma för Mount Wilson och *en annan* för Uppsala.

Vad är nu orsaken till, att de beräknade solarkonstanterna blivit höga, när transmissionskoefficienterna blivit små och vice versa? Vi hava ovan framhållit, att, om de Langleyska villkoren äro uppfyllda, en dylik relation mellan solarkonstanter och transmissionskoefficienter icke är sannolik. Vi kunna därför med största sannolikhet säga, att de Langleyska villkoren icke varit uppfyllda vid bestämningarna av solarkonstanterna. Vi måste därför antaga, att antingen transmissionskoefficienterna eller solstrålningen eller möjligen båda ändrats under observationerna. Det första antagandet har flera gånger framhållits bland andra, som vi ovan sett, av Guthnick, det andra av doc. Ångström i sin ovannämnda uppsats.

Vad nu det första av dessa antaganden beträffar, är det till en början tydligt, att transmissionskoefficienterna

måste variera på ett sådant sätt, att ett lineärt förhållande äger rum mellan Log I_z och z, ty i annat fall erhålles icke en rät linje i det logaritmiska diagrammet och fall, där detta icke äger rum, kasseras vanligen med den motiveringen, att atmosfären förändrats under observationerna.

Låt i_0 vara strålningsintensiteten för en viss våglängd utanför atmosfärens gräns, β den hithörande transmissionskoefficienten, då första observationen göres, vilket antages ske vid den genomstrålade luftmängden n, så erhålles lätt (se Ångströms uppsats)

$$\frac{di_0}{i_0} = -n\frac{d\beta}{\beta},$$

om i_0+di_0 är den ur diagrammet erhållna intensiteten utanför atmosfärens gräns och $\beta+d\beta$ den likaledes ur diagrammet erhållna transmissionskoefficienten. Låt vidare S beteckna den verkliga solarkonstanten och $S+dS$ den beräknade, där alltså dS är felet i den beräknade solarkonstanten, så är

$$S = \varkappa\int_0^\infty i_0 d\lambda\,;\quad S+dS = \varkappa\int_0^\infty (i_0+di_0)\,d\lambda\,;$$

eller

$$\frac{dS}{S} = \frac{\int_0^\infty di_0 d\lambda}{\int_0^\infty i_0 d\lambda}.$$

Insättes värdet på di_0, så blir

$$\frac{dS}{S} = -\frac{n\int_0^\infty i_0\frac{d\beta}{\beta}d\lambda}{\int_0^\infty i_0 d\lambda}.$$

Ur diagrammen kan β icke bestämmas. Dess värde är sålunda obekant och vi kunna följaktligen icke beräkna dS/S. Jag vill emellertid tillåta mig den tämligen grova approximationen att ersätta $\frac{d\beta}{\beta}$ med ett medelvärde. Vi

kunna då skriva

$$\frac{dS}{S} = -n\left|\frac{d\beta}{\beta}\right|.$$

Vi vilja nu sätta $\left|\frac{d\beta}{\beta}\right|$ lika med årsmediet av de i tab. 1, 2 och 3 införda värdena på $\frac{d\beta}{\beta}$ d. v. s. vi antaga, att transmissionskoefficienten vid skikttjockleken n, som varierat dag från dag, i genomsnitt varit lika med den, som gäller för den grupp, där antalet solarkonstanter varit störst, samt att skillnaden mellan den skenbara transmissionskoefficienten och den vid skiktet n varit lika med differensen mellan de största och minsta transmissionskoefficienterna. I så fall bör det beräknade värdet på dS/S bliva ungefär detsamma, som erhålles, om dS sättes lika med differensen mellan högsta och lägsta beräknade solarkonstant samt S lika med mediet inom den grupp, som innehåller de flesta solarkonstanterna. Ehuru formeln är mycket approximativ, har jag likväl utfört denna räkning och därvid antagit, att n är lika med 3 för observationerna i Washington och på Mount Wilson men 2,5 i Uppsala, vilket i allmänhet torde varit den längsta skikttjockleken därstädes. Nedanstående tabell innehåller dessa beräkningar.

Tab. 4.

Observationsort		$dS/S_{ber.}$ %	$dS/S_{obs.}$ %
Washington	1903—1907	13,8	14,6
Mount Wilson	1905	6,5	7,4
»	1906	8,2	5,9
»	1908	10,5	4,8
»	1909	12,2	10,5
»	1910	16,4	15,0
»	1911	18,1	9,6
Uppsala	1912—1915	29,9	22,2
»	1919	26,9	22,2
»	1920	18,8	13,7

Om vi undantaga observationerna på Mount Wilson 1908 och 1911, äro de beräknade och observerade värdena

på dS/S av samma storleksordning. Full överensstämmelse är naturligtvis ej att vänta, då den använda formeln endast är approximativ. Tydligen hava de ovan gjorda antaganden icke varit uppfyllda vid observationerna på Mount Wilson åren 1908 och 1911. Av räkningen torde emellertid framgå, att den av mig funna relationen mellan de beräknade solarkonstanterna och transmissionskoefficienterna kan förklaras, om man antager att de senare varierat under observationstiden.

Till i allt väsentligt samma resultat har doc. R. Lundblad kommit, vilken undersökt materialet från Mount Wilson med användande av variationskalkylen. Avhandlingen är avsedd att intagas i Vet. Akad. Arkiv för mat., fysik och kemi.

Doc. Ångström har, så vitt jag förstått honom rätt, godkänt denna förklaring beträffande observationerna i Uppsala men däremot ej för de på Mount Wilson, varest han anser, att atmosfären är mycket ren, så att variationerna i transmissionskoefficienterna äro obetydliga och att Abbot härigenom helt eller i det närmaste fullständigt lyckats undgå den ovan diskuterade felkällan. Gent emot en sådan uppfattning har E. Kron opponerat sig, som tillsammans med G. Müller under Teneriffaexpeditionen 1910 anställt extingtionsmätningar å Alta Vista (3 260 m), varest enligt hans åsikt de atmosfäriska förhållanden varit fullt så goda, som på Abbots stationer. Även under de mest ideala förhållanden därstädes voro transmissionskoefficienterna icke konstanta utan förändrades med tiden. Han anser därför, att Abbot överskattat noggrannheten i sina solarbestämningar.

Doc. Ångström har som ovan nämnts sökt förklara det anförda sambandet mellan transmissionskoefficienter och beräknade solarkonstanter genom antagandet, att solstrålningen förändrats under observationstiden. Det är då till en början tydligt, att intensiteten hos respektive våglängder måste ändras på ett sådant sätt, att en lineär relation äger rum mellan Log I_z och z. Antag att intensiteten

vid skikttjockleken 3 vore I_z' och vid skikttjockleken 2 hade värdet $I_z'(1+a)$, så måste den vid skiktet 1 hava värdet $I_z'(1+a)^2$. Då nu a kan anses som en liten kvantitet kunna vi skriva respektive intensiteter som I_z', $I_z'(1+a)$ och $I_z'(1+2a)$ d. v. s. ändringen i intensiteten måste vara lika stor då skiktet ändras från 3 till 2 som då den ändras från 2 till 1. Nu är på Mount Wilson den tid, som erfordras för att skiktet skall förändras från 3 till 2 omkring $^1/_2$ timme, under det att tiden för skiktets förändring från 2 till 1 är omkring 3 à 4 timmar. Om vi i det logaritmiska diagrammet skall erhålla en rät linje, måste sålunda under den första halvtimmens observationer intensiteterna ändras lika mycket som under de återstående 3 à 4 timmarna. Då jag anser det uteslutet, att solstrålningens intensitet är beroende av tiden på Mount Wilson, anser jag redan av detta skäl, att doc. Ångströms förklaring icke kan antagas. Om intensiteterna, som väl vore naturligare att antaga, förändrades proportionellt med tiden, så skulle i det logaritmiska diagrammet erhållas en kurva, som starkt avviker från den räta linjen, om intensitetsvariationerna skola hava sådana värden, att den ovan anförda gången i transmissionskoefficienter och solarkonstanter skall kunna förklaras.

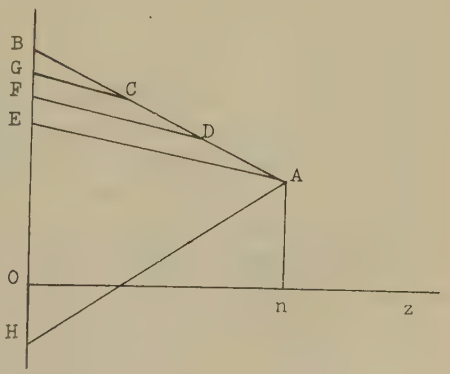


Fig. 3.

Vi vilja emellertid antaga, att vi erhållit en lineär relation mellan Log I_z och z t. ex. linjen AB i det logaritmiska diagrammet, fig. 3, på vilken linje alltså observationspunkterna ligga, samt att A må vara första och C sista observationen. Doc. Ångström påstår nu, att sidan OB är lika med logaritmen för den till $z=o$ extrapolerade intensiteten, då observationen C gjordes. Detta

är oriktigt. Ty låt AE vara den linje, som skulle erhållas, om strålningsintensiteterna vore konstanta, så är det tydligt, att om t. ex. efter det man observerat punkten D strålningsintensiteten bleve konstant, övriga observationspunkter måste ligga på linjen DF, som är parallell med linjen AE, ty transmissionskoefficienten är hela tiden konstant och denna bestämmer linjens lutning, om intensiteten är konstant. Det är då klart, att om man vill erhålla den till atmosfärens gräns extrapolerade intensiteten, som förefanns, då sista observationen C gjordes, man måste draga linjen CG parallell med AE. Sidan OG är sålunda logaritmen för den sökta intensiteten och icke, som doc. Ångström påstår, sidan OB. Den beräknade solarkonstanten blir sålunda i detta fall större än den verkliga, då observationen C gjordes, och ett motsatt förhållande äger rum, om strålningsintensiteterna minskats under observationerna.

Doc. Ångström har även sökt kvantitativt bevisa sitt antagande. Han har i det diagram, som Abbot lämnat över de beräknade solarkonstanterna för Mount Wilson 1911 (motsvarande för 1910, se fig. 1), uppmätt för de skilda observationsdagarna ändringen i solarkonstanten under observationstiden och funnit denna vara vid de högsta solarkonstanterna i genomsnitt $+0{,}025$ och vid de minsta $-0{,}022$. Denna beräkning förutsätter, att solarkonstanten varierat proportionellt med tiden omedelbart före maxima och minima, vilket synes mig osannolikt. Låt dS beteckna den ovannämnda ändringen i solarkonstanten samt S solarkonstantens medelvärde, så finner doc. Ångström för de högsta solarkonstanterna $dS/S = +1{,}2\,\%$ och för de minsta $dS/S = -1{,}2\,\%$. Ur formeln

$$\frac{dS}{S} = -n\frac{d\beta}{\beta}$$

finner han vidare $\frac{d\beta}{\beta} = -0{,}6\,\%$ för de högsta och $+0{,}6\,\%$ för de lägsta solarkonstanterna. Doc. Ångström har härvid antagit, att den första observationen tagits vid skikttjock-

leken 3 men likväl i formeln insatt n lika med 2. Detta sammanhänger med hans felaktiga åsikt, att efter linjen AB extrapolerade (se fig. 3) intensiteten skulle vara intensiteten vid atmosfärens gräns, då sista observationen C togs. Då som jag visat, detta ej är riktigt, skall som värde på n användas 3 och icke 2. De beräknade värdena på $\frac{d\beta}{\beta}$ böra därför vara $-0{,}4$ % respektive $+0{,}4$ %.

Om sålunda den av doc. Ångström framhållna förklaringen vore riktig, skulle vi erhålla en svag gång i transmissionskoefficienterna i förhållande till solarkonstanterna i den riktning jag funnit. Ur tab. 2 finna vi för Mount Wilson 1911, att medelvärdet på $\frac{d\beta}{\beta}$ är 6 %. Hälften av detta värde alltså 3 % motsvarar det av doc. Ångström beräknade. Det enligt den Ångströmska förklaringen funna värdet 0,4 % är sålunda 7,5 gånger för litet. Det är sålunda tydligt, att den av Ångström framhållna effekten är allt för liten för att kunna förklara den av mig funna relationen mellan de beräknade solarkonstanterna och transmissionskoefficienterna. Om denna skall kunna förklaras genom effekten i fråga, måste man antaga att intensiteterna förändrats under observationstiden med ett belopp, som är många gånger större än det som erhålles ur de Abbotska diagrammen. Med största sannolikhet förekomma icke sådana variationer i solstrålningen, ty då skulle de utan tvivel hava upptäckts av Guthnick.

Av det ovan anförda framgår, att det av mig funna sambandet mellan de skenbara transmissionskoefficienterna och de beräknade solarkonstanterna kan förklaras genom antagandet, att transmissionskoefficienterna förändrats under observationstiden, men att den av doc. Ångström lämnade förklaringen härför giver en för liten effekt. Jag har därför ingen anledning att frångå min i Kosmos uttalade åsikt, att den Langleyska metoden icke eliminerar atmosfärens absorberande inflytande vid beräkningen av solarkonstanterna och att de av Abbot funna variationerna i

solarkonstanterna icke äro reella utan bero på ovannämnda fel.

Jag vill här tillägga, som jag även framhöll i mitt föredrag i Fysiska sällskapet i Uppsala den 13 dec. förra året, att jag anser det ställt utan all tvivel, att solstrålningen förändras med solverksamheten alltså med antalet solfläckar. Om man för varje år tager mediet av de beräknade solarkonstanterna, elimineras i allmänhet de stora variationerna och det så erhållna mediet kan betraktas som ett mer eller mindre säkert uttryck för den genomsnittliga solverksamheten under året. Abbot har funnit en svag gång i detta årsmedium med antalet solfläckar under året på sådant sätt, att ju större antalet solfläckar varit desto större har solarkonstantmediet blivit. Att av dessa jämförelsevis små variationer i solarkonstanterna sluta till, att de av Abbot funna stora variationerna äro reella, är enligt min mening icke riktigt.

Jag skulle kunna sluta här, men i doc. Ångströms uppsats finnas en del misstag, av vilka särskilt tvenne kunna lämna oriktiga föreställningar hos dem, som icke arbetat inom detta område, och jag vill därför här rätta desamma.

På sid. 14 har doc. Ångström infört ett diagram, där solarkonstanterna äro avsatta längs abskissaxeln och »Transmissionen» vid Mount Wilson 1911 längs ordinataxeln. Avsikten med detta diagram är, som framgår av andra stycket, sid. 13, att visa, att det av mig funna sambandet mellan transmissionskoefficienter och beräknade solarkonstanter icke gäller för Mount Wilson 1911. Den i diagrammet som ordinator avsatta »transmissionen» är emellertid icke transmissionskoefficienter utan vad Abbot kallar »Atmospheric transmission», vilken han definierar genom uttrycket

$$\frac{A_0 a}{E_0'},$$

varest E_0' är den beräknade solarkonstanten och A_0 samt a beräknade ur formeln $A = A_0 a^z$, där A är den *totala* strål-

ningen vid jordytan, då det genomstrålade skiktet är z. Denna »Atmospheric transmission» är alltså en mycket komplicerad funktion av samtliga våglängders transmissionskoefficienter och dessutom av den i atmosfären befintliga vattenångans selektiva absorption, vilken förändras dag från dag. Att denna transmission skulle följa det av mig funna sambandet mellan transmissionskoefficienter och solarkonstanter har jag aldrig påstått och om den ej gör detta, följer ej därav, att det av mig ovan nämnda sambandet icke förefinnes. Doc. Ångström har här förväxlat denna transmission med transmissionskoefficienter. Det är anmärkningsvärt att en sådan förväxling kunnat ske.

På sid. 16 omnämner doc. Ångström, att fluktuationer i atmosfärens transmission ge oss fullkomligt missvisande värden på solarkonstanten, vilket, som vi ovan visat, är alldeles riktigt, men tillägger »Stundom kan den ovan beskrivna beräkningsmetoden till och med ge mig *negativa (!)* (kursiverat av doc. Ångström) värden på solarkonstanten, utan att absurditeten på annat sätt i mätningarnas gång är påfallande. Detta inträffar någon gång under våra klimatiska betingelser.» Detta är ett fullkomligt misstag. Solarkonstanten beräknas, som vi ovan sett, ur formeln

$$S = \varkappa \int_0^\infty i_0 d\lambda .$$

Skall solarkonstanten bliva negativ, måste åtminstone några av de till atmosfärens gräns extrapolerade intensiteterna i_0 bliva *negativa (!)*, men detta kan aldrig inträffa. Låt oss antaga, att transmissionskoefficienterna under observationstiden ändrats på ett så onaturligt sätt, att vi i det logaritmiska diagrammet erhållit linjen AH, fig. 3, som skär den negativa ordinataxeln, d. v. s. att intensiteten vid jordytan minskas ju högre solen stiger på himmeln, så blir visserligen $\mathrm{Log}\, i_0$ negativ, men detta betyder som bekant ej att i_0 blir negativ utan mindre än 1. Intensiteterna och följaktligen även solarkonstanterna kunna aldrig bliva negativa. Påståendet om negativa solarkonstanter verkar överraskande på dem, som sysslat med *beräkningen* av solarkonstanter.

Genmäle till lektor Gallanders »Bemötande» i häft. 2. 1921—22.

Av KNUT HOLMBERG.

Lektor Gallander har i sitt bemötande av min uppsats om reaktionerna vid elektroderna vid elektrolys trott sig lämna, som han säger, en enklare och riktigare uppfattning härom. Jag vill först opponera mig mot ordet riktigare. Båda uppfattningarna undandraga sig experimentel prövning, så att något riktigt kan man ej tala om utan blott om det som ter sig mest sannolikt. Jag ber i detta sammanhang få påpeka, att vi städse böra ihågkomma att dissociationsteorien blott är en hypotes, och vars uppfattning i åtminstone åtskilliga fall kommit till korta vid förklaringen av vissa fysikaliska och kemiska fenomen, låt vara, att dissociationsteorien visserligen hjälpt vetenskapen framåt på många områden, men kanske ändå en dag kommer, då den liksom så många andra teorier faller. Därmed ej sagt något förklenande om densamma. Lektor G.! Det duger ej alltid att vara alltför modern.

Angående lektor G:s förklaring av förloppet av elektrolys av H_2SO_4 mellan Cu-elektroder kan jag ej finna annat än att den är oriktig även sedd från dissociationsteoriens ståndpunkt. Antag nämligen, att vi i stället för H_2SO_4 hava en så koncentrerad lösning av kopparsulfat, att Cu-jonens osmotiska tryck är större än Cu:s lösningstension, då kan nämligen det av lektor G. påstådda utsändandet av Cu-joner från anoden ej äga rum och någon elektrolys sålunda ej komma till stånd.[1] (Jämför för övrigt teorien

[1] Vid ökad koncentration av kopparsulfatet måste den för elektrolysen erforderliga spänningen höjas, för att anodens benägenhet att utsända Cu-joner skall övervinna jonernas ökade osmotiska tryck. *Red:s anm.*

för Daniells element). Erfarenheten lär oss emellertid, att elektrolysen fortskrider lika bra vid koncentrerade som utspädda lösningar. Sedd från min synpunkt är däremot förklaringen densamma som för H_2SO_4.

Vad fenomenet mellan Pt-elektroder beträffar, tillägger lektor G. OH-jonerna en stor roll. Detta är visserligen ett ganska vanligt betraktelsesätt vid åtskilliga fenomen, men jag måste för min del opponera mig mot denna uppfattning, huvudsakligen av det skäl, att OH-jonens koncentration måste vara relativt ringa och på denna grund icke spela någon avgörande roll vid denna elektrolys. Att H_2O_2 bildas synes mig visserligen möjligt, men föga troligt. Jag har icke i litteraturen kunnat finna något belägg för detta lektor G:s påstående. Vore därför synnerligen förbunden för upplysning var lektor G. fått denna sin uppgift ifrån.[1]

Någon skiljaktighet vid behandlingen av elektrolys av sulfat eller klorid vid min teori förefinnes icke, utan är förklaringen enahanda.

Att slutligen termokemiska förhållanden skulle spela rollen vid natriums legering med kvicksilver i detta fall, motsäges av flerfaldiga elektrolytiska förlopp, då ej den stablaste föreningen bildas. Jämför för övrigt lektor G:s eget påstående angående bildningen av H_2O_2.

Vad lektor G. och jag tydligen torde vara ense om är, att behandlingen av hithörande viktiga frågor, äro synnerligen oklart och oformligt framställda särskilt inom den elementära lärobokslitteraturen. Det skall för mig bli ett sant nöje att ta del av lektor G:s utlovade framställning av den kvantitativa behandlingen av hithörande frågor.

[1] Se Riesenfeld, Berichte der Deutschen Chem. Gesellschaft, 1909. Angående övriga anmärkningar av lektor Holmberg mot lektor G. hänvisas till efterföljande uppsats av lektor Starck. *Red:s anm.*

Några beräkningar på grundval av Nernst's formel.

Av G. STARCK.

Författaren till närmast framförstående inlägg har i ett tidigare dylikt (denna tidskr. årg. 5, h. 2) uttalat, att läroböcker och undervisning giva en oklar och bristfällig framställning av förloppen vid sådana elektrolyser, där väte och syre utvecklas vid elektroderna. Jag är av samma åsikt, men jag har en annan mening om orsaken härtill. Jag finner orsaken vara den, att den elektrolytiska dissociationsteorien ännu icke har slagit igenom i skolan i hela sin utsträckning. Reaktionsläran, läran om de analytiska reaktionerna, står nu helt i dissociationsteoriens och massverkans tecken, ej så läran om de galvaniska elementen och elektrolytiska processerna. Sammanfattat i en formel kan man säga, att Arrhenius och Ostwald ha segrat, men inte Nernst.

I det följande skall framläggas ett försök till utredning av de katodiska och anodiska förloppen vid elektrolys av en lösning innehållande två positiva, resp. två negativa joner. En sådan lösning föreligger alltid, när lösningsmedlet är vatten, en tvåbasisk syra, som dissocieras enligt formlerna:

$$H_2O \rightleftarrows H^{\cdot} + OH'$$
$$\text{och } OH' \rightleftarrows H^{\cdot} + O''.$$

Grundvalen för beräkningarna är för det första dissociationsteorien, inte därför att denna teori skulle vara sann, utan därför att förf. inte känner någon bättre beskrivning av de fenomen den vill beskriva. Den absoluta vissheten,

att denna teori i framtiden kommer att avlösas av andra teorier är intet argument mot dess användning nu — var skulle vi då vara?

För det andra är grundvalen Nernst's formel för potentialdifferensen mellan ett grundämne och en lösning innehållande grundämnet i jonform. Även denna formels riktighet torde vara lika allmänt erkänd som dissociationsteoriens. Formeln lyder som bekant

$$E = \mp \frac{RT}{nF} \ln \frac{P}{p},$$

där E är elektrodens potential i förhållande till lösningen, R gaskonstanten, T den absoluta temperaturen, n jonens valens, F laddningen av en gramekvivalent, P en för elektroden karaktäristisk konstant, dess lösningstryck och p jonernas osmotiska tryck i lösningen. Tecknen gälla positiva, resp. negativa joner. Efter övergång till Briggska logaritmer och införande av siffervärden blir formeln (vid + 18°)

$$E = \mp \frac{0{,}05776}{n} \log \frac{P}{p}.$$

Om det osmotiska trycket anses proportionellt mot jonkoncentrationen, övergår formeln till

$$E = \mp \frac{0{,}05776}{n} \log \frac{C}{c},$$

där C nu är en annan för ämnet karaktäristisk konstant, som förf. tidigare tillåtit sig benämna ämnets elektrolytiska gränskoncentration, emedan den framställer den jonkoncentration för vilken E blir $= 0$. Denna konstant är liksom P emellertid endast betingat konstant; om ämnet icke bildar en massiv elektrod eller ett massivt överdrag på elektroden, utan exempelvis elektroden utgör en lösning av ämnet i någon metall, så har C (och P) ett mindre värde, ämnet utvecklar icke hela sitt lösningstryck. C ersättes då av det mindre värdet C'. För mycket små elektrodkoncentrationer (för zinkamalgam understigande 0,01 gramjon zink pr lit.

amalgam) har man funnit proportionalitet mellan C' och ämnets koncentration i elektroden, men för beräkningen av det absoluta värdet på C' för en viss koncentration saknas, så vitt jag vet, hållpunkter i litteraturen. Eftersom det osmotiska trycket vid högre koncentrationer växer mycket fortare än koncentrationen och C' möjligtvis är proportionell mot det osmotiska trycket, så skulle en upplösning av elektroden i någon metall troligtvis nedsätta C och lösningstrycket mycket kraftigt och hastigare än koncentrationsminskningen ägde rum.

Ett annat fall, då ämnets lösningstryck är mindre än normalt är följande. Antag, att det är fråga om utfällande av en viss metall på en indifferent elektrod. Om denna utfällning sker med en låg, från noll föga skild spänning, så erhålles visserligen en obetydlig fällning, men endast till dess metallens lösningstryck motväger den anlagda spänningen. Det är i detta fall av minimal utfällning, som metallens lösningstryck ej kommer till sin fulla utveckling. Först då den katodiska sönderdelningsspänningen vuxit till sådant värde, att det utfällda metallskiktet är massivt, äger nu utan vidare höjning av spänningen en regelrätt elektrolys rum. Vi beteckna tiden för växande katodisk spänning, tills den katodiska sönderdelningsspänningen uppnås, för induktionstiden.

1. *Förhållandena vid katoden.* Antag, att en lösning innehåller två och endast två positiva joner Me_1 och Me_2 och giv åt de i Nernst's formel ingående storheterna motsvarande indices. I lösningen nedsänkes ett indifferent metallbleck vari ingen av metallerna må lösa sig, och vi anlägga en långsamt växande katodisk spänning. Enligt ovanstående komma då under induktionstiden båda metallerna att falla ut, men i olika mängder, nämligen sådana, att i varje ögonblick E är detsamma för båda. I ett visst ögonblick hava vi således:

$$E = \frac{0{,}05776}{n_1} \log \frac{C_1'}{c_1} = \frac{0{,}05776}{n_2} \log \frac{C_2'}{c_2},$$

där C' betyder det outvecklade värdet på den elektrolytiska gränskoncentrationen.

Vilken av jonerna det kommer att avskiljas mest av beror framför allt på lösningstrycket, så att i regel metallen med lägre lösningstryck avskiljes i större mängd. Dock kan en ringa skillnad i lösningstryck kompenseras av en större jonkoncentration hos den oädlare metallen. Så t. ex. komma bly och tenn att under denna induktionstid avskiljas i lika mängder, om blyets jonkoncentration är cirka 6 gånger tennets, trots att skillnaden i normalpotential endast är 0,02 *V*.

Vid fortsatt katodisk utfällning, betingad av en ökning i den anlagda spänningen, komma förhållandena att gestalta sig olika, beroende på om de båda metallerna bilda en mekanisk blandning eller en lösning eller en kemisk förening. Det sistnämnda fallet torde ej behöva behandlas här. I det första fallet kommer för den ena (i regeln ädlare) metallen induktionstiden hastigt att upphöra, och denna metall avskiljes under fortsättningen som ett massivt överdrag på katoden vid en spänning, som är konstant, så länge jonkoncentrationen är konstant, men måste ökas, om under elektrolysen jonkoncentrationen sjunker. För den andra, oädlare metallen kommer induktionstiden att fortfara, metallen kommer alltid att falla ut i visserligen utomordentligt små mängder, men dock så, som kräves av villkoret $E_1 = E_2$. Praktiskt taget kommer metallen ej att falla ut.

Om vid fortsatt elektrolys den utfällda metallens jonkoncentration minskas, kan härigenom spänningen stiga till värdet för den andra metallens utfällande, och denna börjar nu falla ut.

Innehåller exempelvis en lösning av positiva joner endast $Sn^{\cdot\cdot}$ och $Fe^{\cdot\cdot}$ i 1 normal koncentration, så utfaller, bortsett från induktionstiden, tenn vid en katodisk spänning av $+0{,}10$ V (väteelektroden $= 0{,}00$). När tennets jonkoncentration har sjunkit till 10^{-11} och spänningen därigenom stigit till 0,43 V börjar även järnet falla ut.

Det bör anmärkas, att den angivna koncentrationen icke behöver gälla hela lösningen och i praktiken säkert aldrig kommer att göra det. På grund av att man praktiskt alltid arbetar med ändliga, t. o. m. stora strömtätheter, inträda koncentrationsförändringar i elektrodernas grannskap mycket hastigare än i lösningen i dess helhet. Bestämmande för potentialdifferensen elektrod-lösning blir koncentrationen i skiktet närmast intill elektroden.

Om de båda metallerna bilda en fast lösning, så komma vid elektrolys båda att falla ut ädlare d. v. s. med lägre spänning än normalt och i de proportioner, som betingas av att potentialsprångén metallösning för båda metallerna äro lika.

Det fall, som här är av intresse är emellertid det alltid förekommande, att den ena av de positiva jonerna utgör vätejonen, vidare, att den andra jonen är oädlare än väte. I stort sett och i princip regleras förhållandena här av Nernst's formel, dock tillkomma ett par särskilda omständigheter. Först och främst beträffande vätejonernas koncentration. Denna kan visserligen variera inom ganska vida gränser, från några enheter för en koncentrerad stark syra till 10^{-7} för en neutral lösning och ned till några enheter gånger 10^{-15} för en koncentrerad lösning av en stark bas. Men inom detta koncentrationsintervall komma alltid, så länge det finnes lösningsvatten, vätejoner att finnas i elektrodens omedelbara närhet. Någon absolut utarmning på vätejoner, sådan som kan inträffa i fråga om andra joner vid tillräcklig strömtäthet, kommer aldrig att äga rum, emedan nya joner genast levereras av vattnets dissociation.

Den andra omständigheten är vätets överspänning, d. v. s. det förhållandet, att man för att avskilja väte vid vissa metaller måste anlägga en spänning högre än den normala. Om vi sätta spänningen mellan en omvändbar väteelektrod (väte löst i platinerad platina) och $1n\ H_2SO_4=0$,

så kräves för vätets avskiljande ur denna lösning vid zink $+0{,}70$ V, vid kvicksilver $+0{,}76$ V. Det betyder, att väte i vissa fall är lika många volt oädlare än normalt, och att man genom elektrolys ur vattenlösning kan avskilja flera metaller, som anges vara oädlare än väte.

Om vi beteckna en omvändbar väteelektrod som nollelektrod, så kräver väte för att fällas ut ur en 1 normallösning, bortsett från överspänningen, en spänning av $0{,}00$ V. Ur vatten, vars normalitet är 10^{-7}, fordras gent emot en omvändbar väteelektrod en spänning $= 0{,}40$ V. Kommer härtill en överspänning av $0{,}76$ V, så blir den för utfällning av väte ur vatten erforderliga katodiska spänningen $1{,}16$ V. Om genom elektrolysen lösningen blir basisk, så starkt som 1 normal, blir jonkoncentrationen 10^{-14}, och den katodiska spänningen blir i detta fall $0{,}81 + 0{,}76 = 1{,}57$ V.

Antag, att vi elektrolysera en 1 normal NaCl-lösning med en antagen jonkoncentration av $H^\circ = 10^{-7}$, $Na^\circ = 1$, med växande katodspänning. Om vi bortse från induktionstiden, som ej har något praktiskt intresse, så kommer, när spänningen har vuxit till $0{,}40$ V (resp. vid största förekommande överspänning $1{,}16$ V) väte att utvecklas. Natrium kan på grund av sin högre normalpotential ($-2{,}71$ V) ej fällas ut av denna spänning. I den mån, på grund av jämvikten mellan vatten och dess joner, vätejonernas koncentration sjunker, stiger den nödvändiga spänningen. Vi kunna med Nernst's formel lätt beräkna, till vilket värde vätejonkoncentrationen skall sjunka för att spänningen skall stiga till $2{,}71$ V, d. v. s. natrium falla ut. Man finner lätt koncentrationen 10^{-68} (i ogynnsammaste fall, nämligen högsta överspänning). Till detta låga värde kan emellertid, som ovan framhållits, vätejonernas koncentration aldrig sjunka, så länge en lösning och icke en smälta föreligger.

Elektrolys av natriumklorid med kvicksilverkatod. Vid detta elektrolytiska förfarande erhålles natriumamalgam, vilket ofta anföres som bevis för natriums primära avskiljande i alla fall — även dem, då intet natrium erhålles.

Man kan dock åtminstone kvalitativt visa, att den elektrolytiska bildningen av natriumamalgam icke strider mot eller får en mindre sannolik förklaring genom Nernst's formel. För en fullt kvantitativ framställning saknar litteraturen siffror.

Det är i detta fall två faktorer, som gynna utfällandet av natriummetall, nämligen för det första att natrium löses i kvicksilvret och i denna lösning ej kan utveckla hela sitt lösningstryck i massivt tillstånd, för det andra den höga överspänningen gent emot en kvicksilverkatod. Vad den första faktorn beträffar, så kunna knappast några beräkningar av natriums lösningstryck i amalgam göras. Man har sammansatt ett slags koncentrationselement enligt schemat

Zn-amalgam, konc. | $ZnSO_4$ lösning | Zn-amalgam, utsp.,

där amalgamens koncentration likväl understeg 0,01 gramatom pr lit., och funnit, att den elektromotoriska kraften här låter beräkna sig av antagandet att metallens lösningstryck i amalgamet är proportionellt mot dess osmotiska tryck (koncentration). Men därav framgår ej, *hur* stort detta lösningstryck är för en given koncentration. Liksom nu det osmotiska trycket vid större koncentrationer växer mycket hastigare än koncentrationen, så är väl sannolikt, att även det elektriska lösningstrycket förhåller sig på samma sätt, m. a. o. att man genom upplösning av natrium i kvicksilver minskar metallens normalpotential vida kraftigare än i proportion till utspädningen. Härtill kommer, att natrium har en viss affinitet till kvicksilver, varför man med säkerhet kan antaga, att metallen genom upplösning i kvicksilver blir högst betydligt ädlare. Om vi få antaga, att den blir 1,5 V ädlare, äro vi nere vid den för vätets avskiljande nödvändiga spänningen (1,2 V).

Frågan huruvida väte är den primära eller den sekundära produkten vid elektrolys av natriumsalter kan besvaras genom en hänvisning till följande analoga fall. Om man elektrolyserar en blandning av ett koppar — och ett

järnsalt, så faller endast koppar ut. Är koppar härvid den primära produkten eller skall resultatet förklaras så, att det först faller ut järn, men då som välbekant järn icke kan »bestå» i en lösning av kopparsulfat, så löses järnet upp i den mån det bildas, utfällande koppar. Troligtvis har ingen under någon än så dunkel period av kemiens historia haft en dylik uppfattning. Om man anser, att vätejonen är en jon som alla andra och icke begåvad med några särskilda mystiska egenskaper, om man m. a. o. medgiver, att väte har en plats i metallernas spänningskedja, så synes slutsatsen, att väte är primärt bildad vid natriumsalters elektrolys, vara den enda möjliga.

2. *Förhållandena vid anoden.* Frågeställningen är här analog: är vid elektrolys av ett sulfat t. ex. med platinaelektrod syre den primärt, genom vattnets sönderdelning, bildade produkten, eller bildas först atomgruppen SO_4, som sekundärt reagerar med vatten? Bejakandet av det första alternativet är kanske här icke lika obetingat, som i fråga om det katodiska förloppet, men dock tillräckligt kraftigt. Bevisen bliva här vagare, därför att man inte känner i fritt tillstånd de atomgrupper, det här gäller, likaså därför att vattnets negativa jon är hydroxyljonen, medan syrejonen, om också teoretiskt och principiellt möjligt, ej är säkert påvisad.

Ett sannolikhetsbevis för att det vid anodisk syrgasutveckling vid elektrolys av olika syror handlar om ett och samma förlopp visar sönderdelningsspänningarna för olika syror (enl. Le Blanc), under för övrigt överensstämmande förhållanden.

	Sönderdeln.-spänning.
Salpetersyra	1,66
Fosforsyra	1,67
Myrsyra	1,69
Ättiksyra	1,67
Propionsyra	1,68

	Sönderdeln.-spänning.
Smörsyra	1,67
Valeriansyra	1,67
Vinsyra	1,66
Bensoesyra	1,67
Ftalsyra	1,68

Anmärkningsvärt är det lika värdet på sönderdelningspunkten. Om det i alla dessa fall är syrans negativa jon, som urladdas, så återstår att besvara frågan, vilken orsaken är till att så olika joner hava noga samma elektroaffinitet. Men därtill kommer att denna gemensamma sönderdelningsspänning är oberoende av syrans koncentration, vilket ännu mer stärker uppfattningen av att det är något annat och för lösningarna gemensamt, som sönderdelas. Emellertid skall det icke förnekas, att även utom den gemensamma, högre belägna för syrorna individuella sönderdelningspunkter finnas.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Anmälan av »De tekniska vetenskaperna».

På Albert Bonniers förlag utkommer en serie arbeten »De tekniska vetenskaperna» under redaktion av Professor Hjalmar O. Dahl, Överingenjör Erik Aug. Forsberg, Professor E. Hubendick och Professor T. Lindmark.

Denna serie är avsedd att lämna en fullständig översikt över de tekniska vetenskapernas nuvarande ståndpunkt. Många av dess delar torde på grund av ämnets natur ej kunna bjuda på mycket av intresse för en fysiker. Av de hittills utkomna 4 banden höra till detta slag bandet om byggnadsmaterialier samt det om arbetsmaskiner. Däremot erbjuda avdelningen Maskinteknik band II om teknisk termodynamik och band IX om kylteknik båda av Prof. Hubendick mycket av intresse för en fysiker. Det är särskilt lärorikt att se, hur teknikerna handskas med entropibegreppet. Genom diagram blir detta relativt svåra begrepp åskådliggjort, och så möjliggöres en enkel lösning av viktiga problem.

Jag skall ej ingå på en närmare granskning av nämnda arbeten, men vill på det varmaste rekommendera dem till herrar fysiklärares studium. Dessa böcker äro dyra (Band II kostar bunden 31 kr och band IX 36 kr) men om mången enskild drar sig för att köpa dem, torde dock skolornas bibliotek kunna anskaffa dem.

I detta sammanhang tillåter jag mig påpeka vikten av att vi fysiklärare läsa teknisk litteratur för att kunna krydda vår framställning med tekniska tillämpningar. Sådana väcka intresse hos våra elever, t. o. m. om de äro latinare. Vi böra vara medvetna om att flertalet av våra lärjungar ha större nytta i livet av en tekniskt betonad fysikundervis-

ning i skolan än av en blott teoretisk. Med den läggning fysikstudiet har vid våra universitet och på grund av den ringaktning för de tekniska vetenskaperna, man ofta finner hos akademiskt bildade ungdomar, torde det möta svårigheter att få flertalet fysiklärare att erkänna detta. Många finna det knappt som en brist i den nuvarande anordningen att t. o. m. våra realstudenter ej känna så vanligen förekommande tillämpningar av värmeläran som våra bensinmotorer etc. eller många av de allmännast förekommande tillämpningarna av elektricitetsläran.

Ett sätt att få en mer tekniskt betonad fysikundervisning vore att giva ingenjörer kompetens till lärarplatser i våra allmänna läroverk. Den utvägen lär man tillgripit i Tyskland. Utan tvivel vore en ingenjör, som genomgått Tekniska Högskolan på t. ex. elektrotekniska fackavdelningen bättre rustad att undervisa i fysik än en fil. mag. Finge vi ett avsevärt antal dylika lärare i våra skolor, skulle nog ej blott fysiken utan även matematiken få en mer praktisk läggning, och därav skulle för visso dessa ämnen ej lida. *Otto Gallander.*

En vansklig uppgift.

Som följande enkla skolproblem, hämtat ur Collins Algebra, är av rätt vanlig typ, kan det förtjäna en granskning.

»Någon bjuder för en gård 5 000 kr. kontant och 10 275 kr. efter 6 månader. En annan vill giva 7 000 kr. kontant och 8 330 kr. efter 9 månader. Säljaren anser båda anbuden vara lika goda. Hur stor procent beräknar han på sina pengar?»

Den skolmässiga lösningen består däri, att man sätter de båda anbudens nuvärden lika, då man, under antagande att procenten är x, får ekv.:

$$5\,000+\frac{10\,275}{1+\frac{x}{200}}=7\,000+\frac{8\,330}{1+\frac{3x}{400}},$$

som efter hyfsning ger:

$$x^2 - \frac{833}{6}x + \frac{2\,200}{3} = 0, \text{ varur } x_1 = 133\tfrac{1}{3} \text{ och } x_2 = 5\tfrac{1}{2}.$$

Emot denna lösning kan ju ingenting invändas annat än möjligen, att den är uteslutande teoretisk, då ej någon vid övertagandet av en räntefri skuld för denna betalar dess nuvärde utan i bästa fall dess diskonterade värde.

Enklare och naturligare är väl att tänka sig, att man insätter inbetalningarna allt eftersom de inflyta i en ränteanstalt, och att man jämför de innestående beloppens storlek vid någon tidpunkt efter att den sista inbetalningen gjorts. Närmast till hands ligger då att välja tidpunkten omedelbart efter den sista inbetalningen, alltså i denna uppgift efter 9 månader. Man får då ekv.:

$$5\,000\left(1+\frac{3x}{400}\right)+10\,275\left(1+\frac{x}{400}\right)=7\,000\left(1+\frac{3x}{400}\right)+8\,330$$

$$\therefore \quad \frac{171x}{16}=55, \text{ varur } x=5{,}15,$$

alltså ett väsentligt olika värde mot nyss.[1]

Om man sätter de båda anbudens värden efter 1 år lika, får man, under förutsättning att räntan under denna tid ej kapitaliseras, ekv.:

$$5\,000\left(1+\frac{x}{100}\right)+10\,275\left(1+\frac{x}{200}\right)=7\,000\left(1+\frac{x}{100}\right)+$$

$$+8\,330\left(1+\frac{x}{400}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{211x}{20}=55, \text{ varur } x=5{,}21.$$

[1] Man skulle ju också kunna tänka sig, att räntan kapitaliserades efter 6 månader, då man får ekv.:

$$5\,000\left(1+\frac{x}{200}\right)\left(1+\frac{x}{400}\right)+10\,275\left(1+\frac{x}{400}\right)=$$

$$=7\,000\left(1+\frac{x}{200}\right)\left(1+\frac{x}{400}\right)+8\,330$$

$\therefore x^2 - 427{,}5x + 2\,200 = 0$, varur $x_1 = 422{,}29$ och $x_2 = 5{,}21$.

På liknande sätt kan man få en massa olika ekvationer. Om ingen av dessa kan väl påstås, att den är oriktig. Uppgiften är alltså obestämd och fordrar ett tillägg om huru anbudens värden skola beräknas.

Saken belyses kanske bäst, om man vänder på uppgiften. En lätt retuschering har därvid gjorts.

Någon bjuder för en gård 5 000 kr. kontant och 10 212 kr. efter 6 mån. En annan vill giva 7 000 kr. kontant och 8 264 kr. efter 9 mån. Vilket anbud är bäst, när räntefoten är 5 %?

Som nedanstående beräkningar visa, lyder det överraskande svaret: det beror helt och hållet på hur man räknar.

1) Nuvärdet av

$$\text{förra anbudet} = 5\,000 + \frac{10\,212}{1+\frac{5}{200}} = 14\,962{,}93,$$

$$\text{senare » } = 7\,000 + \frac{8\,264}{1+\frac{3\cdot 5}{400}} = 14\,965{,}30.$$

Svar: det *senare* anbudet är fördelaktigare.

2) Efter 9 mån. är värdet av

$$\text{förra anbudet} = 5\,000\left(1+\frac{3\cdot 5}{400}\right) + 10\,212\left(1+\frac{5}{400}\right) = 15\,527{,}15,$$

$$\text{senare » } = 7\,000\left(1+\frac{3\cdot 5}{400}\right) + 8\,264 = 15\,526{,}50.$$

Svar: det *förra* anbudet är fördelaktigare.

3) Efter 1 år är värdet av

$$\text{förra anbudet} = 5\,000\left(1+\frac{5}{100}\right) + 10\,212\left(1+\frac{5}{200}\right) = 15\,717{,}30,$$

$$\text{senare » } = 7\,000\left(1+\frac{5}{100}\right) + 8\,264\left(1+\frac{5}{400}\right) = 15\,717{,}30.$$

Svar: båda anbuden äro lika fördelaktiga.

Karl Blix.

Matematiska uppgifter.

115) Bevisa att $8 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = 1$, då $\alpha = 20°$.
O. G—r.

116) Till en cirkel O äro dragna två tangenter TA och TB, som tangera i A och B. På den mindre bågen AB tages en punkt C ($\frown AC < \frac{1}{2} \frown AB$), och på AT avsättes stycket AC_1 lika med bågen AC. Kordan CD drages parallell med AB, och likaledes linjen C_1D_1, som skär TB i D_1. Visa att C_1D_1 är större än CD. *O. G—r.*

117) Om a är ett udda tal som ej är divisibelt med 3, så kan a^6 alltid skrivas såsom $72m+1$, där m är ett helt tal.

118) Tre strålar i planet OA, OB och OC äro sådana att vinklarna mellan dem alla äro trubbiga. Sök triangeln ABC sådan, att dessa strålar äro dess bissektriser. *M—r.*

119) Två plana figurer, A och B hava lika ytor och förhållandet mellan deras omkretsar är p. Två med dem resp. likformiga figurer A_1 och B_1 hava lika omkretsar, och förhållandet mellan deras ytor är q. Visa att $p^2q = 1$.
Gustaf Lindborg.

120) En bägare innehåller n kulor, obekant hur många av dem äro vita. Man drager en av dem, och den befinnes vara vit. Hur stor är sannolikheten för att alla äro vita? *Gustaf Lindborg.*

Lösningar till uppg. i häft. 2. 1921—22.

103) *I en inskrivbar fyrhörning äro sidorna i ordning a, b, c, d. Visa, att radien R till den cirkel, i vilken en fyrhörning med sidorna a, b, c, d i godtycklig ordningsföljd kan inskrivas, är*

$$R = \tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}} = \frac{D_{ab} \cdot D_{ac} \cdot D_{ad}}{4Y},$$

där Y föreställer fyrhörningens yta, p halva summan av sidorna och D_{ab}, D_{ac}, D_{ad} de diagonalkordor som samman-

binda ändpunkterna av genom index angivna intill varandra stående kordor. Visa även, att den i cirkeln inskrivna fyrhörningens yta, ävensom de tre diagonalkordorna enligt ovanstående, förbliva oförändrade till sina värden, om man i stället för a, b, c, d insätter dessa sidors dubbla avstånd från cirkelns medelpunkt.

Satsen förutsätter att fyrhörningen är konvex. Om a, b, c, d äro givna sträckor, av vilka den längsta (och a fortiore en kortare) understiger summan av de tre andra, finnas tre *konvexa* inskrivbara fyrhörningar, för vilka R har det uppgivna värdet. Sidorna ingå i dessa i ordningsföljden (I) $abcd$, (II) $acdb$, (III) $adbc$ eller någon av de motsatta. Om vi i första fallet kalla vinkeln mellan a och b för v, har man

$$D_{ab}^2 = \frac{a^2+b^2-2ab\cos v}{1} = \frac{c^2+d^2+2cd\cos v}{1} = \\ = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \quad \ldots\ldots (1)$$

med möjlighetsvillkoret

$$\cos^2 v = \left\{\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right\}^2 < 1,$$

som leder till

$$(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d) \\ (a+b+c-d) > 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

d. v. s. det ovan angivna villkoret. Genom cyklisk permutation av b, c, d erhålles

$$D_{ac}^2 = \frac{(ad+bc)(ab+cd)}{ac+bd} \quad \ldots\ldots (3)$$

och

$$D_{ad}^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \quad \ldots\ldots (4)$$

Ur (1), (2), (3) följa

$$D_{ac} \cdot D_{ad} = ab+cd \text{ (Ptolemeiska satsen för II)} \quad \ldots (5)$$

och $$D_{ab} \cdot D_{ac} \cdot D_{ad} = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)} \quad \ldots (6)$$

Har nu den av a, b, D_{ab} bildade triangeln ytan Y_1, och den av c, d, D_{ab} bildade ytan Y_2, följer

$$R = \frac{abD_{ab}}{4Y_1} = \frac{cdD_{ab}}{4Y_2} = \frac{(ab+cd)D_{ab}}{4(Y_1+Y_2)} = \frac{D_{ab}\cdot D_{ac}\cdot D_{ad}}{4Y} \text{ enl. (5).}$$

Ur (6) och det kända uttrycket för Y följer sedan den andra formen för R. Satsens senare del är utan vidare riktig endast om den nya 4-hörningen blir konvex. Ersättas nämligen i $ABCD$ (fig. 1) hörnen B, D med de diametralt motsatta punkterna B', D' uppstår den konvexa

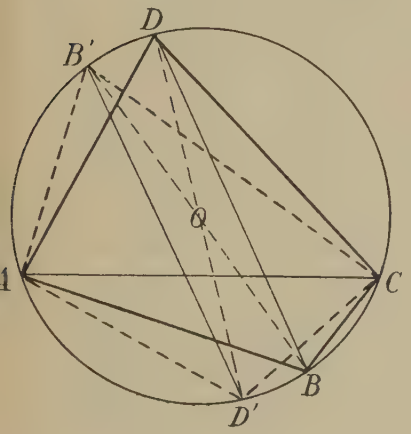


Fig. 1.

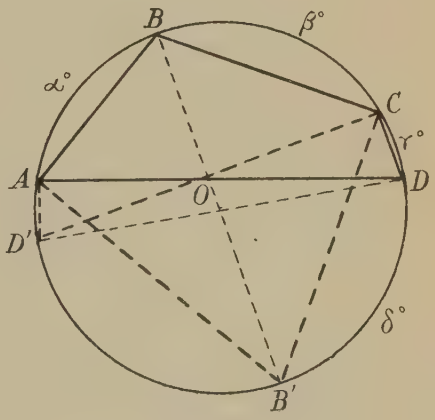


Fig. 2.

$AB'CD'$, i vilken sidorna äro just dubbla avstånden från 0 till sidorna i $ABCD$. Diagonalen $B'D'$ är $\parallel$ och $= BD$, varav följer att ytorna Y äro lika. Även de övriga diagonalkordorna äro lika. *Konvex blir den nya 4-hörningen endast om den gamla innesluter 0;* eljest erhålles en med skärande sidor (fig. 2). För sådana gälla de formler, som framgå ur ovanstående genom att en sida v. s. h. införes med negativt tecken t. ex. a. Y betyder skillnaden mellan triangelytorna $AB'C$ och $AD'B$ absolut tagen. Om i en konvex fyrhörning de utanför a, b, c, d belägna bågarna äro α, β, γ, δ,

gäller satsen, om avstånden från centrum skrivas $R\cos\frac{\alpha}{2}$, . . ., $R\cos\frac{\delta}{2}$ med bibehållande av eventuellt minustecken.

X.

(Även löst av »*Iter*».)

104) *ABCD är en parallellogram, i vilken diagonalen BD och sidorna BC och CD äro utdragna. Drag genom hörnet A en linje som skär BD, BC och CD i P, Q, R resp. så att* $\frac{PQ}{PR}$ *har ett givet förhållande.*

Ur de likformiga trianglarna *PBQ* och *PDA* samt *PDR* och *PBA* fås omedelbart $\frac{PQ}{PA}=\frac{PB}{PD}$ och $\frac{PR}{PA}=\frac{PD}{PB}$, varav $\frac{PQ}{PR}=\left(\frac{PB}{PD}\right)^2$ eller $\frac{PB}{PD}=\pm\sqrt{\frac{m}{n}}$, om $\frac{m}{n}$ är det givna förhållandet. Man har således endast att dela *BD* innantill och utantill i förhållandet *m* till medelproportionalen mellan *m* och *n* för att få de sökta linjerna.

(Löst av »*Iter*», *S. B—n* och *X.*)

105) *A är en punkt på en cirkel, B en punkt på tangenten i A. Sök den punkt P på cirkeln, där summan av eller skillnaden mellan kvadraterna på PA och PB är maximum eller minimum.*

A och *B* kunna antagas var som helst i cirkelns plan. *O* är mittpunkten till *AB*. 1:o) Enligt mediansatsen är då $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ max. eller min. på samma gång som $\overline{PO}^2$ och *PO*. Om diametern genom *O* skär cirkeln i *M* och *N*, och *M* ligger närmast *O*, har man min. i *M* och max. i *N*. Faller *O* i cirkelns centrum, är $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ konstant. 2:o) Man bevisar lätt analytiskt att $|\overline{PA}^2-\overline{PB}^2|$ är max. eller min. på samma gång som *P*:s avstånd från mittpunktsnormalen till *AB*. Ty ligger *A* i $(-a, 0)$, *B* i $(a, 0)$, *P* i (x, y) i ett rätv. koord.-syst., är

$$|\overline{PA}^2-\overline{PB}^2|=|(x+a)^2-(x-a)^2|=4a|x|.$$

Om nu den med AB parallella diametern skär cirkeln i M och N kunna tre fall inträda.

a) Mittpunktsnormalen m till AB skär ej cirkeln. Då har man min. i den av punkterna M och N, som ligger m närmast, och max. i den andra.

b) m skär cirkeln i två punkter. Då har man min. (o) i dessa och max. i M och N.

c) m tangerar cirkeln i M. Då är max. i N och min. ($=o$) i M.

X.

(Även löst av *S. B—n* och »*Iter*».)

106) *Om* $a, b, c \ldots l, m$ *äro primtal och* $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda, \mu$ *hela tal, så innehåller talet* $N=a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda m^\mu$ *divisorer till ett antal av* $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots(1+\lambda)(1+\mu)$, *däri inräknade talen 1 och N.*

Bevis. Om ett tal R, innehållande π_r divisorer, multipliceras med en dignitet n^ν av ett primtal n, som icke förut ingår i R, kommer den erhållna produkten att innehålla $\pi_r(1+\nu)$ divisorer. Ty var och en av de π_r olika kombinationer av faktorer, som kunna uttagas ur R, kan sammanställas med faktorerna 1, n, n^2 . . . n^ν eller med tillsammans $(1+\nu)$ faktorer. Talet a^α innehåller $(1+\alpha)$ divisorer, talet $a^\alpha b^\beta$ sålunda $(1+\alpha)(1+\beta)$ divisorer o. s. v., allt under förutsättning att enheten och talet självt medräknas bland divisorerna.

Anm. Om talet 1 ej skall medräknas bland divisorerna, minskas antalet divisorer med en enhet. Uppgiften blir då densamma som att finna antalet kombinationer av alla klasser av n föremål, av vilka $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda, \mu$ äro sinsemellan lika ($\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda+\mu=n$). Samtliga kombinationer av olika klasser ingå såsom termer i koefficienterna för x, x^2, x^3 etc. i det utvecklade uttrycket för produkten

$$(1+ax+a^2x^2+\ldots+a^\alpha x^\alpha)(1+bx+b^2x^2+\ldots+b^\beta x^\beta)\ldots (1+mx+m^2x^2+\ldots+m^\mu x^\mu),$$

och *antalet* kombinationer av exempelvis klassen k anges av koefficienten för x^k, när $a, b, c \ldots l, m$ sättas $=1$.

Totala antalet kombinationer av alla klasser ehålles sålunda, om man i uttrycket

$$(1+x+x^2+\ldots+x^\alpha)(1+x+x^2+\ldots+x^\beta)\ldots(1+x+x^2+\ldots+x^\mu)$$

sätter $x=1$ och minskar det så erhållna talet med en enhet. Man finner då, att totala antalet kombinationer är $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots(1+\lambda)(1+\mu)-1$ (Todhunter, Algebra, 1889, p. 536). »*Iter*».

(Även löst av *S. B—n* och *X.*)

107) *ABC är en triangel där O är bissektrisernas skärningspunkt. M är en given punkt, vars spegelbilder i OA, OB och OC kallas M_a, M_b, M_c resp. Visa att AM_a, BM_b och CM_c träffas i en punkt.*

Låt ekvationerna under normalform för sidorna a, b, c vara $f_a=0$, $f_b=0$ och $f_c=0$ resp. samt punkten M:s avstånd från samma sidor d_a, d_b, d_c resp. Då är M_a:s avstånd från $b=d_c$, från $c=d_b$ och på samma sätt fås M_b:s och M_c:s avstånd. Vi få då följande ekvationer, om M, liksom Origo, ligger inom triangeln.

För AM_a . . . . . $d_bf_b-d_cf_c=0$.
» BM_b . . . . . $d_cf_c-d_af_a=0$.
» CM_c . . . . . $d_af_a-d_bf_b=0$.

Ligger M utom triangeln ändras minustecknet i två av dessa ekvationer till $+$. Genast inses då, att linjerna gå genom samma punkt. »*Iter*».

(Löst av *S. P—n* och *X.* Den sistnämnde har, likasom »Iter», givit vidlyftiga diskussioner, vilka dock tidskriftens utrymme och dess egenskap av elementär hindra oss att upptaga.)

108) *En cirkel och två punkter P och Q inom eller utom densamma äro givna. Man betraktar alla i cirkeln inskrivna trianglar ABC, sådana att AB går genom P och AC genom Q. När är sidan BC maximum eller minimum?*

Emedan i varje triangel $a=2\varrho\sin\alpha$, då ϱ är den omskrivna cirkelns radie, måste ett extremvärde för sidan BC motsvaras av ett sådant för vinkeln BAC eller av dennas övergång från spetsig till trubbig eller omvänt. Det är

därför utan vidare tydligt, att de lägen av punkten A, för vilka BC är maximum eller minimum, måste utskäras parvis av vissa individer i cirkelknippet PQ. De individer som härvid ifrågakomma, äro räta linjen PQ, cirkeln med PQ såsom diameter och de båda cirklar, som tangera den givna cirkeln i var sin punkt T_1, T_2, resp. Huru dessa sistnämnda erhållas, förutsättes bekant (de gemensamma tangenterna i T_1 och T_2 skära, som bekant, räta linjen PQ i dennas skärningsp. med kordalen till den givna cirkeln och en godtycklig individ i cirkelknippet PQ).

Om räta linjen PQ skär den givna cirkeln i punkterna S_1 och S_2, försvinner kordan BC vid punktens A passage genom någon av dessa punkter, vilka sålunda bestämma två minima för sidan BC.

Antages vidare cirkeln med PQ såsom diameter skära den givna cirkeln i punkterna D_1 och D_2, övergår kordan BC vid punktens A passage genom någon av punkterna D_1 och D_2 till en diameter i den givna cirkeln. Punkterna D_1 och D_2 bestämma sålunda två maxima för sidan BC.

Då slutligen punkten A vid passagen genom T_1 (resp. T_2) kommer att såväl före som efter passagen ligga antingen utanför eller innanför cirkeln PQT_1 (resp. PQT_2), inses omedelbart, att T_1 och T_2 bestämma var sitt extremvärde för vinkeln A och därmed även för sidan BC. Dessa extremas natur är lätt att fastställa, om man beaktar, att vid punktens A passage genom cirkeln maxima och minima måste alternera.

Ligga P och Q innanför cirkeln, uppträda alltid punktparen S och T. Saknas punktparet D, komma punkterna T att alternera med punkterna S och bestämma två maxima. Förekommer även punktparet D, är den av punktparen S och D bildade punktgruppen hyperbolisk, och punkterna T_1 och T_2 bestämma den ena ett maximum, den andra ett minumum.

Ligger den ena av punkterna P och Q innanför cirkeln, den andra däremot utanför, så förekomma alltid punktparen S och D, under det att punktparet T saknas.

Ligga punkterna P och Q båda utanför cirkeln, uppträder alltid punktparet T. Saknas punktparen S och D, bestämmer den ena punkten i punktparet T ett max., den andra ett min. Uppträder även punktparet S men ej punktparet D, bestämma punkterna T_1 och T_2 var sitt maximum. Uppträder punktparet D men ej punktparet S, bestämma T_1 och T_2 var sitt minimum. Uppträda slutligen samtliga punktpar, är den av punktparen S och D bildade punktgruppen åter hyperbolisk, och punkterna T_1 och T_2 bestämma ett max. och ett min.

Tangeras cirkeln av linjen PQ, sammanfalla i tangeringspunkten två S-punkter och en T-punkt. Vid frånvaro av D-punkter bestämmer tangeringspunkten ett minimum och den andra T-punkten ett maximum. Uppträda även D-punkter, bestämma T-punkterna var sitt minimum.

Tangeras cirkeln av en på PQ såsom diameter uppritad cirkel, sammanfalla i tangeringspunkten två D-punkter och en T-punkt. De båda T-punkterna bestämma i detta fall vid frånvaro av S-punkter ett maximum och ett minimum, vid närvaro av S-punkter var sitt maximum.

Ligger den ena av de givna punkterna på cirkeln, så finnas under alla förhållanden endast ett maximum och ett minimum.

Ligger den ena punkten P inom cirkeln, den andra Q på planets ∞-linje, så bestämmer linjen PQ två minima och den däremot vinkelräta linjen genom P två maxima.

Ligger den ena punkten P utanför cirkeln, den andra Q på ∞-linjen, så bestämma tangenterna från P till cirkeln vid frånvaro av S-punkter ett maximum och ett minimum, vid närvaro av S-punkter två maxima.

Extrema saknas, endast om båda punkterna ligga på cirkeln eller båda på ∞-linjen. *»Iter».*